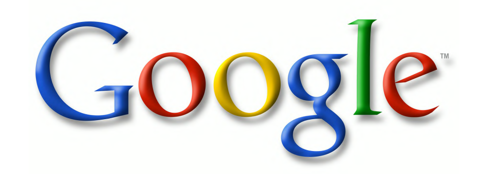
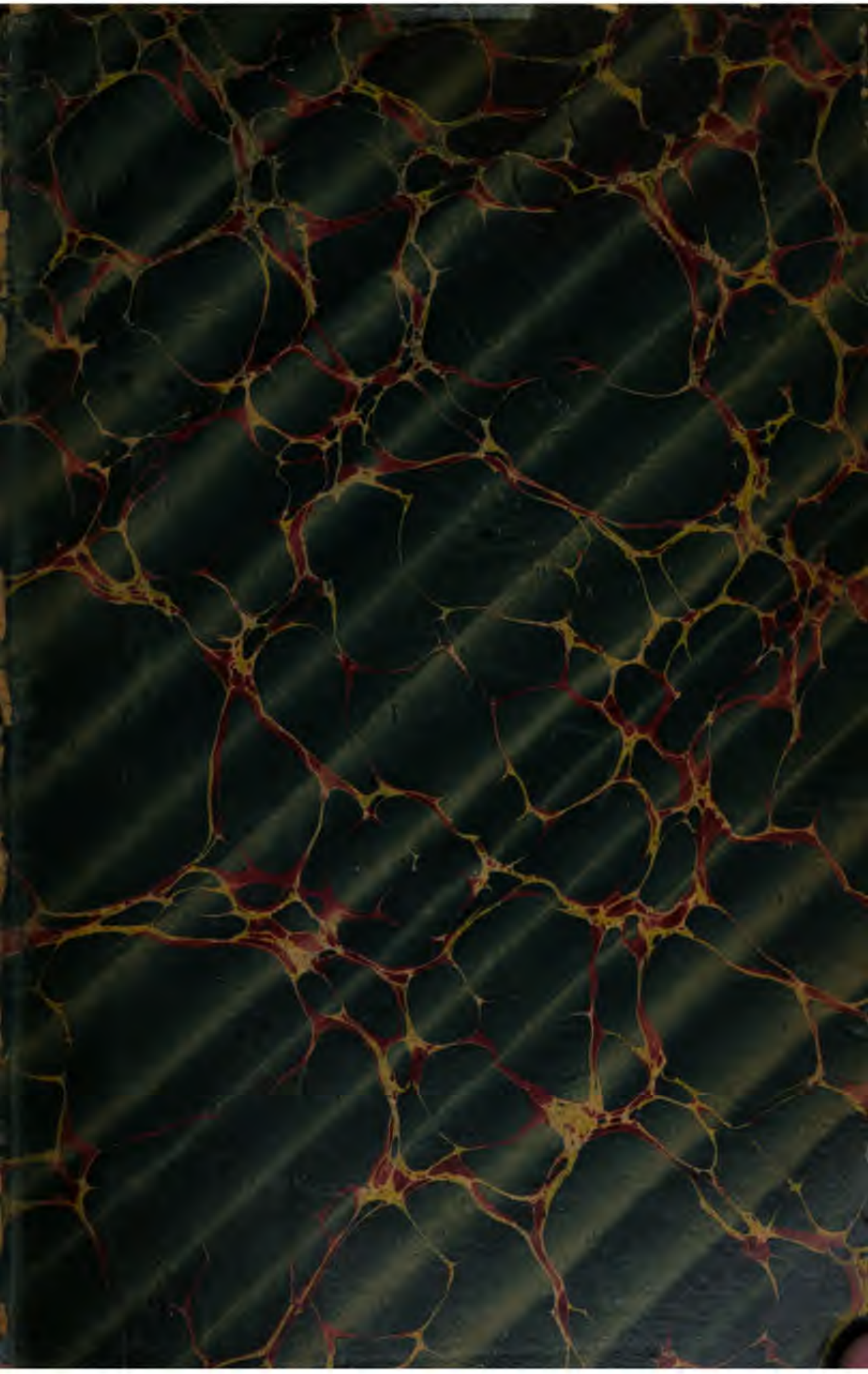

Google



B 471232



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



COURS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET INTÉGRAL.

COURS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET INTÉGRAL,

PAR J.-A. SERRET,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES.

QUATRIÈME ÉDITION,

AUGMENTÉE D'UNE

NOTE SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. CH. HERMITE.

TOME PREMIER.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

55, Quai des Grands-Augustins.

1894

AVERTISSEMENT DES ÉDITEURS.

Cet Ouvrage reproduit en substance les Leçons professées par J.-A. Serret à la Sorbonne.

L'Auteur n'avait pas cru toutefois devoir se renfermer dans les limites de son enseignement oral, et les diverses théories qu'il avait à exposer ont reçu tous les développements utiles. Les règles du Calcul différentiel et les applications de ce Calcul à la Géométrie font l'objet du Tome I. Le Tome II traite du Calcul intégral.

M. Ch. Hermite a bien voulu ajouter, à la fin du Tome II (p. 735-904), une Notice sur la théorie des fonctions elliptiques.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

Pages

AVERTISSEMENT.. v

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Des fonctions.. 1
Des limites.. 3
Des infiniment petits et des infiniment grands.................. 4
Divers ordres d'infiniment petits.............................. 5
De la méthode infinitésimale.............................. 7

CHAPITRE II.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE INDÉPENDANTE.

De la continuité.. 15
Des dérivées.. 15
Des différentielles.. 25
Théorème relatif aux fonctions de fonctions.......................... 28
Objet du Calcul différentiel. — Différentiation des fonctions algébriques explicites.. 29
Application des règles précédentes.............................. 35
Application à quelques problèmes simples.......................... 37
Théorème relatif à la différentiation des fonctions composées de plusieurs fonctions d'une variable indépendante.............. 41

Pages
Conséquence du théorème précédent........................... 45
Différentiation des logarithmes et des exponentielles............. 46
Différentiation des fonctions circulaires......................... 56
Différentiation des fonctions implicites.......................... 62
De l'élimination des constantes arbitraires...................... 65

CHAPITRE III.

DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE. — DÉRIVÉES PARTIELLES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

Des dérivées des divers ordres................................ 69
Des différentielles des divers ordres........................... 69
Des différences des divers ordres.............................. 72
Dérivées partielles, différentielles partielles et différences partielles des divers ordres d'une fonction de plusieurs variables indépendantes.. 75
Calcul des différentielles des divers ordres d'une fonction composée de plusieurs fonctions.................................... 81
Cas d'un produit de plusieurs fonctions......................... 84
Différentielles des divers ordres des fonctions implicites.......... 87
Sur l'élimination des arbitraires............................... 89
Du changement de la variable indépendante...................... 91
Du changement de toutes les variables.......................... 93

CHAPITRE IV.

DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES DES DIVERS ORDRES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

De la différentielle totale du premier ordre d'une fonction de plusieurs variables indépendantes................................ 98
Théorème relatif à la différentiation d'une fonction composée de fonctions de plusieurs variables indépendantes................ 99
Différentielles totales des ordres supérieurs des fonctions de plusieurs variables indépendantes............................... 101
Calcul des différentielles totales des divers ordres des fonctions implicites de plusieurs variables indépendantes............... 103
De l'élimination des fonctions arbitraires....................... 106
Du changement des variables indépendantes.................... 116
Du changement de toutes les variables.......................... 126
Transformation de Legendre.................................. 129

CHAPITRE V.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES.

Pages
Notions préliminaires sur les séries 132
Expression de la valeur que prend, pour $x = x_0 + h$, une fonction qui s'annule, avec ses $n-1$ premières dérivées, pour $x = x_0$ ... 150
Formule de Taylor 152
Remarques sur la formule de Taylor 156
Formule de Maclaurin 158
Développement de la fonction e^x en série ordonnée suivant les puissances entières de x 160
Développement des fonctions $\cos x$ et $\sin x$ en séries ordonnées suivant les puissances entières de x 162
Développement de la fonction $\log(1+x)$ en série ordonnée suivant les puissances de x 164
Formules relatives au calcul des logarithmes 166
Formule du binôme 171
Développement de la fonction $f(x+h)$ en série ordonnée suivant les puissances de h, dans les cas où la formule de Taylor n'a pas lieu 176
Détermination de la limite vers laquelle tend le rapport de deux fonctions qui tendent l'une et l'autre vers zéro ou vers l'infini .. 180
Représentation des fonctions e^x et $\log x$ par des limites des fonctions algébriques 189
Extension des formules de Taylor et de Maclaurin aux fonctions de plusieurs variables 191
Théorème relatif aux fonctions homogènes 196

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES MAXIMA ET DES MINIMA.

Des maxima et des minima des fonctions d'une seule variable 198
Application à quelques exemples 201
Remarque sur les maxima et les minima relatifs 209
Cas des fonctions implicites d'une seule variable indépendante ... 211
Des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables indépendantes 216
Application à quelques exemples 223
Cas où les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables cessent d'être déterminées quand on donne aux variables les valeurs qui répondent au maximum ou au minimum 231
Cas des fonctions implicites de plusieurs variables indépendantes. 236
Remarque sur le cas d'une fonction explicite de plusieurs variables liées par des équations données 237

CHAPITRE VII.

THÉORIE DES COURBES PLANES.

Pages

De la tangente et de la normale aux courbes planes. — Limite des tangentes.......... 241
Ordre du contact d'une courbe avec sa tangente. — Points d'inflexion. — Concavité et convexité.......... 246
Emploi des coordonnées homogènes.......... 253
Recherche des points d'inflexion des courbes.......... 256
Des points singuliers des courbes planes.......... 260
Caractère analytique des points singuliers.......... 268
Recherche de la nature des points singuliers.......... 271
Différentielle de l'aire d'une courbe plane.......... 281
Différentielle de la longueur d'un arc de courbe plane.......... 283
Du rayon de courbure et du centre de courbure en un point d'une courbe plane.......... 287
Des développées et des développantes des courbes planes.......... 295
Formules relatives au système des coordonnées polaires.......... 299
Des courbes enveloppes.......... 306
Contacts des divers ordres des courbes planes.......... 312
Des courbes osculatrices.......... 316
Du cercle osculateur.......... 321

CHAPITRE VIII.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES COURBES PLANES.

Aire des sections coniques.......... 323
De la différentielle d'un arc de section conique.......... 326
Rayon de courbure des sections coniques.......... 332
Développées des sections coniques.......... 335
De la cycloïde.......... 340
Des épicycloïdes.......... 348
De la développante du cercle.......... 356
De la spirale d'Archimède et de la spirale hyperbolique.......... 358
De la spirale logarithmique.......... 360
Applications de la théorie des enveloppes.......... 364

CHAPITRE IX.

THÉORIE DES COURBES GAUCHES ET DES SURFACES COURBES.

De la tangente et du plan normal d'une courbe quelconque.......... 367
Du plan tangent et de la normale à une surface courbe.......... 370

Pages
Emploi des coordonnées homogènes.......................... 373
Différentielle de la longueur d'un arc de courbe quelconque..... 375
Expressions des cosinus des angles que fait la tangente d'une courbe avec les directions de trois axes rectangulaires................ 380
Du rayon de courbure en un point d'une courbe quelconque... 381
De la normale principale en un point d'une courbe gauche....... 385
Du centre de courbure en un point d'une courbe gauche........ 386
Expressions des cosinus des angles qui déterminent la direction de l'axe du cercle de courbure........ 389
Expression de la différence entre un arc de courbe et sa corde... 391
De l'ordre du contact d'une courbe et d'une surface. — Des surfaces osculatrices en un point d'une courbe donnée........... 394
Du plan osculateur en un point d'une courbe donnée........... 396
De la torsion ou seconde courbure des courbes gauches.......... 401
Résumé et complément des formules principales relatives à la théorie des courbes gauches................................ 406
De la sphère osculatrice en un point d'une courbe donnée....... 409
Expression des coordonnées du centre et du rayon de la sphère osculatrice en un point d'une courbe........................ 416
Des surfaces enveloppes... 418
Des surfaces développables...................................... 422
De la surface polaire. — Lieu des centres des sphères osculatrices aux divers points d'une courbe donnée........................ 426
Théorie générale des développées et des développantes........... 432
Application des théories précédentes à l'hélice................. 442
De l'ordre du contact de deux courbes quelconques. — Des courbes osculatrices.. 448
Du cercle osculateur en un point d'une courbe gauche. — Son identité avec le cercle de courbure.......................... 451
Du contact des surfaces courbes................................. 451

CHAPITRE X.

DES LIGNES TRACÉES SUR LES SURFACES COURBES. — ÉTUDE DE DIVERSES CLASSES DE SURFACES.

Expression du rayon de courbure d'une courbe tracée sur une surface donnée. — Théorème de Meunier..................... 455
Comparaison des rayons de courbure des sections normales en un point d'une surface. — Des sections principales............... 458
Autre manière de présenter les résultats qui précèdent. — De l'indicatrice... 464
Cas où la théorie précédente est en défaut...................... 470

Pages

De l'enveloppe des plans tangents à une surface aux divers points d'une courbe donnée. — Des tangentes conjuguées 472
Expressions générales des rayons de courbure principaux, en un point quelconque d'une surface. — Détermination des ombilics. 474
Détermination des ombilics de l'ellipsoïde 478
Des lignes de courbure d'une surface 479
Propriétés relatives aux lignes de courbure 484
De la surface dont tous les points sont des ombilics 491
Des systèmes triples de surfaces orthogonales 493
Théorème de Dupin sur les surfaces orthogonales 501
Des systèmes triples de surfaces orthogonales du deuxième degré. 503
Des lignes de courbure de l'ellipsoïde 507
Des lignes de niveau et des lignes de plus grande pente 514
Des surfaces réglées; leur distinction en surfaces développables et en surfaces gauches 517
Des surfaces cylindriques. — Équation aux dérivées partielles de ces surfaces 523
Des surfaces coniques. — Équation aux dérivées partielles de ces surfaces 525
Des surfaces conoïdes. — Équation aux dérivées partielles de ces surfaces 527
Des surfaces de révolution. — Équation aux dérivées partielles de ces surfaces 529
De l'équation aux dérivées partielles des surfaces développables.. 531
Des surfaces des canaux 535
De l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées 537

CHAPITRE XI.

DES FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES.

Manière de représenter les variables imaginaires. — Des fonctions algébriques 540
Des séries dont les termes sont imaginaires 544
Définition de la fonction exponentielle, dans le cas d'une variable imaginaire 550
Définition des fonctions circulaires directes, dans le cas d'une variable imaginaire 553
Relations entre les fonctions exponentielles et les fonctions circulaires 554
De la fonction logarithmique et des fonctions circulaires inverses, dans le cas d'une variable imaginaire 558
De la continuité 562
Dérivée et différentielle d'une fonction d'une variable imaginaire. 566

Pages

Démonstration d'un théorème de Cauchy........................ 570
Formule de Maclaurin.. 579
Formule de Lagrange... 583
Applications de la formule de Lagrange...................... 588

CHAPITRE XII.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES.

Théorèmes relatifs à la décomposition des fractions rationnelles.. 592
Cas d'une fraction rationnelle dont le dénominateur n'a que des facteurs simples.. 598
Méthodes pour effectuer la décomposition d'une fraction rationnelle, dans le cas général.................................. 600
Forme nouvelle de l'expression d'une fonction rationnelle décomposée en fractions simples.................................. 605
Mode particulier de décomposition pour les fractions rationnelles et réelles dont le dénominateur a des facteurs linéaires imaginaires.. 610
Détermination d'une fonction entière par le moyen des valeurs qui répondent à des valeurs données de la variable............... 616

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

COURS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET INTÉGRAL.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Des fonctions.

1. Parmi les quantités qui interviennent dans une recherche mathématique, il y a lieu de distinguer celles dont la valeur est *déterminée* et celles qui sont susceptibles de prendre plusieurs valeurs différentes. Les premières sont désignées sous le nom de *constantes*, les autres sont dites des *variables*.

Dans toute question où il y a lieu de considérer plusieurs variables, on peut attribuer à quelques-unes de ces variables des valeurs arbitraires, et alors les autres variables prennent des valeurs déterminées. Les premières sont nommées *variables indépendantes*, les autres sont

dites *variables dépendantes* ou *fonctions des variables indépendantes*.

Ainsi la considération du cercle conduit à trois quantités : le rayon, la circonférence et la surface. Si l'on attribue à l'une d'elles diverses valeurs arbitraires, les deux autres prennent des valeurs correspondantes déterminées, et en conséquence elles sont des fonctions de la première quantité, qui est ici la variable indépendante.

Dans un cylindre, il y a lieu de considérer quatre quantités : le rayon, la hauteur, la surface et le volume. On peut attribuer à deux d'entre elles des valeurs arbitraires ; les deux autres prennent alors des valeurs déterminées : elles sont donc fonctions de deux variables indépendantes.

2. Les fonctions que nous considérerons seront en général définies *analytiquement,* c'est-à-dire par le moyen des relations ou équations qui existent entre elles et les variables indépendantes.

Une fonction est dite *algébrique* lorsque l'équation par laquelle elle est liée aux variables indépendantes peut être formée en n'exécutant sur les variables que les seules opérations de l'Algèbre : 1° l'addition et la soustraction ; 2° la multiplication ; 3° la division ; 4° l'élévation à des puissances entières ; 5° l'extraction des racines d'indices entiers. Dans le cas contraire, la fonction est *transcendante*.

Lorsque l'équation qui lie une fonction aux variables indépendantes est résolue par rapport à la fonction, celle-ci est dite une fonction *explicite*. Dans le cas contraire, la fonction est *implicite*. On voit que les fonctions explicites sont celles dont la valeur peut être obtenue en exécutant sur les variables et sur des constantes une ou plusieurs opérations bien définies.

Les fonctions algébriques explicites sont *rationnelles* lorsque dans leur expression ne figure aucun radical affectant une quantité variable; elles sont *irrationnelles* dans le cas contraire. Les fonctions rationnelles se subdivisent elles-mêmes en *fonctions entières* et en *fonctions fractionnaires*. Une fonction entière n'est autre chose qu'un polynôme; une fonction fractionnaire est le quotient de deux polynômes.

Le plus souvent nous désignerons les fonctions par de simples lettres, de même que les variables indépendantes. Toutefois, quand il y aura lieu de mettre celles-ci en évidence, nous emploierons les signes habituels $F, f, \varphi, \ldots$, après lesquels figureront, entre deux parenthèses, les diverses variables indépendantes. Ainsi $F(x)$, $f(x)$ $\varphi(x)$, ... désigneront des fonctions de la variable x; $F(x,y), f(x,y)$, ... désigneront de même des fonctions des deux variables x, y.

Des limites.

3. Lorsque les valeurs successives d'une variable x se rapprochent de plus en plus de la valeur d'une constante a, de manière que la valeur absolue de la différence $x - a$ puisse devenir et demeurer constamment inférieure à une quantité donnée quelconque, on dit que la variable x a pour *limite* la constante a.

Il faut remarquer que la variable peut être inférieure ou supérieure à sa limite; il peut même arriver qu'elle soit tantôt plus petite, tantôt plus grande que cette limite. Le lecteur est déjà familiarisé avec cette notion des limites par l'étude de la Géométrie et de la Trigonométrie. On sait, par exemple, que la surface du cercle est la limite vers laquelle tend la surface d'un polygone régulier inscrit ou circonscrit, lorsque le nombre des côtés de ce

polygone augmente indéfiniment. On a vu aussi, dans la Trigonométrie, que les rapports $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\tang x}{x}$ ont pour limite l'unité lorsque l'arc x décroît indéfiniment.

Je rappellerai encore le principe de la méthode des limites, dont on fait un si grand usage dans les Mathématiques; ce principe peut être énoncé comme il suit :

Si deux quantités variables restent constamment égales entre elles dans tous les états de grandeur par lesquels elles passent, et si l'une d'entre elles tend vers une limite, l'autre tend vers la même limite ou vers une limite égale.

L'évidence de cette proposition est telle, que tout développement serait superflu; son importance est d'ailleurs révélée par les nombreuses applications qu'on en a faites dans la Géométrie.

Des infiniment petits et des infiniment grands.

4. Lorsqu'une quantité variable tend vers la limite zéro, on dit qu'elle devient *infiniment petite;* on la nomme alors un *infiniment petit.*

Lorsqu'une variable croît indéfiniment, de manière à pouvoir devenir et à rester constamment supérieure à une quantité quelconque donnée, on dit qu'elle devient *infiniment grande,* ou simplement *infinie.*

Ces locutions d'*infiniment petit* et d'*infiniment grand* n'ont donc pas d'autre objet que l'abréviation du langage. Ainsi, au lieu de dire que $\sin x$ tend vers la limite zéro, et que $\cot x$ croît au delà de toute limite quand x tend vers zéro, nous dirons que, x étant un infiniment petit, $\sin x$ est lui-même un infiniment petit et $\cot x$ un infiniment grand.

Divers ordres d'infiniment petits.

5. Les infiniment petits étant des quantités essentiellement variables, il y a lieu de leur appliquer ce que nous avons dit plus haut des variables en général, que nous avons distinguées en variables indépendantes et en variables dépendantes. Mais tous les cas se ramènent toujours à celui où les infiniment petits que l'on a à considérer dépendent de l'un d'entre eux; ce cas est le seul qu'il y ait lieu d'examiner ici.

Parmi les infiniment petits qui interviennent dans une recherche analytique, on en choisit un arbitrairement, auquel on donne le nom d'*infiniment petit principal* et auquel on compare les autres infiniment petits, comme nous allons l'indiquer.

Soient α l'infiniment petit principal, 6 un deuxième infiniment petit : on aura, par la nature de ces quantités, $\lim\alpha = 0$, $\lim 6 = 0$. Cela posé, si le rapport $\frac{6}{\alpha}$ tend vers une limite finie k différente de zéro, de manière que l'on ait

$$\frac{6}{\alpha} = k + \varepsilon,$$

ε étant un infiniment petit, nous dirons que 6 est *un infiniment petit du premier ordre*. La formule précédente donne

$$6 = \alpha(k + \varepsilon),$$

et elle fournit ainsi l'expression générale des infiniment petits du premier ordre.

Si le rapport $\frac{6}{\alpha}$ est un infiniment petit du premier ordre, nous dirons que 6 est *un infiniment petit du deuxième ordre*. Dans cette hypothèse on a, par ce qui

précède,

$$\frac{6}{\alpha} = \alpha(k + \varepsilon)$$

ou

$$6 = \alpha^2(k + \varepsilon),$$

formule qui donne l'expression générale des infiniment petits du deuxième ordre ; k y désigne une quantité finie et déterminée différente de zéro ; ε est un infiniment petit.

En général, 6 sera dit *un infiniment petit du* $n^{\text{ième}}$ *ordre* si le rapport $\frac{6}{\alpha}$ est un infiniment petit d'ordre $n - 1$. Et si l'on admet que

$$\alpha^{n-1}(k + \varepsilon)$$

soit l'expression générale des infiniment petits d'ordre $n - 1$, on aura

$$\frac{6}{\alpha} = \alpha^{n-1}(k + \varepsilon),$$

ou

$$6 = \alpha^n(k + \varepsilon),$$

d'où l'on conclut que cette formule contient l'expression générale des infiniment petits du $n^{\text{ième}}$ ordre, quel que soit l'entier n, k désignant, nous devons le répéter, une quantité finie et déterminée différente de zéro, et ε étant un infiniment petit. Le produit $k\alpha^n$ est le *terme principal* de l'infiniment petit d'ordre n représenté par 6.

D'après ce qui précède, on peut dire aussi que l'ordre *infinitésimal* d'un infiniment petit 6 est l'exposant n de la puissance à laquelle il faut élever l'infiniment petit principal α pour obtenir un rapport $\frac{6}{\alpha^n}$ dont la limite soit une quantité finie et déterminée différente de zéro. Notre définition, ainsi transformée, embrasse le cas où n ne

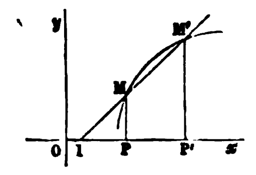
serait pas un nombre entier, ce qui peut offrir quelque avantage. Certaines questions conduisent effectivement à considérer des infiniment petits dont l'ordre est exprimé par un nombre fractionnaire.

La Géométrie nous fournit des exemples nombreux d'infiniment petits de différents ordres; mais, comme cette matière sera traitée à fond dans les Chapitres suivants, nous nous bornerons ici à une simple indication. L'arc de cercle x étant choisi pour infiniment petit principal, on reconnaît immédiatement que $\sin x$ et $\tang x$ sont des infiniment petits du premier ordre; $1 - \cos x$ est un infiniment petit du deuxième ordre; enfin $x - \sin x$ est un infiniment petit du troisième ordre.

De la méthode infinitésimale.

6. On peut employer à deux points de vue très-différents les quantités infiniment petites dans le calcul des grandeurs déterminées.

Le premier point de vue, qui a échappé aux anciens géomètres, consiste à regarder la quantité que l'on cherche comme la limite du rapport de deux infiniment petits. C'est ainsi que l'on procède dans le problème qui a pour objet la recherche des tangentes aux courbes. Effectivement, la courbe MM′ étant rapportée à deux axes de



coordonnées rectilignes, si l'on veut connaître la tangente au point M dont les coordonnées sont x et y, on joindra le

point M à un autre point M′ de la courbe ayant pour coordonnées $x+\alpha, y+\beta$; le coefficient d'inclinaison de la sécante MM′ sera $\frac{\beta}{\alpha}$, et les quantités α, β étant regardées comme infiniment petites, le coefficient d'inclinaison c de la tangente demandée aura pour valeur

$$c = \lim \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ainsi, dans ce problème, la quantité à déterminer se présente comme limite du rapport des accroissements infiniment petits simultanés de l'ordonnée et de l'abscisse du point de contact.

7. Le second point de vue est celui où les anciens se sont placés, et le procédé qui en résulte pour l'évaluation des grandeurs déterminées a été particulièrement développé par Archimède. Il consiste à concevoir les grandeurs décomposées en parties égales ou inégales et à supposer que, le nombre de ces parties augmentant sans limite, chacune d'elles tende vers zéro; en employant le langage de la doctrine infinitésimale, cela revient à dire que chaque grandeur peut être décomposée en un nombre infiniment grand de parties infiniment petites. Ces parties infiniment petites étant de même nature que la grandeur totale, il semble que leur évaluation doit offrir les mêmes difficultés; mais on verra bientôt comment la décomposition dont il s'agit fournit le moyen de remplir l'objet qu'on se propose.

En résumé, toute quantité infiniment petite qu'on a à considérer est destinée à figurer comme terme d'un rapport ou comme élément d'une somme composée d'un nombre infini de parties.

La méthode infinitésimale est contenue dans les deux principes suivants :

8. Premier principe. — *La limite du rapport de deux infiniment petits n'est pas changée quand on les remplace par d'autres infiniment petits dont les rapports avec eux ont respectivement pour limite l'unité.*

En effet, soient α et β les infiniment petits proposés; α', β' deux autres infiniment petits tels, que l'on ait

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1, \quad \lim \frac{\beta'}{\beta} = 1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \varepsilon, \quad \frac{\beta'}{\beta} = 1 + \eta,$$

ε et η étant des infiniment petits.

On tire des formules précédentes

$$\alpha' = \alpha(1 + \varepsilon), \quad \beta' = \beta(1 + \eta);$$

d'où

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta} \, \frac{1 + \varepsilon}{1 + \eta}.$$

Comme la limite du rapport $\frac{1 + \varepsilon}{1 + \eta}$ est évidemment égale à l'unité, on a

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta},$$

ce qui démontre le principe énoncé.

Lorsque la limite du rapport de deux infiniment petits est égale à 1, la différence de ces infiniment petits est infiniment petite par rapport à chacun d'eux; car, si l'on a

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \varepsilon,$$

ε étant un infiniment petit, on en conclut

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha} = \varepsilon, \quad \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha'} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon};$$

et réciproquement l'une ou l'autre des égalités précédentes a pour conséquence $\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1$. Il résulte de là que notre premier principe peut encore être énoncé comme il suit:

La limite du rapport de deux infiniment petits n'est pas changée quand on augmente ou qu'on diminue chacun d'eux d'une quantité infiniment petite par rapport à lui.

Exemple. — Si l'arc x est infiniment petit et que m et n soient des constantes, les quantités $\sin mx$ et $\sin nx$ seront infiniment petites. D'ailleurs leurs rapports aux arcs mx, nx ont pour limite l'unité; donc on a

$$\lim \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}.$$

9. Deuxième principe. — *Soient*

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$$

des infiniment petits positifs dont le nombre m croît indéfiniment. Si la somme de ces infiniment petits est égale à une quantité déterminée S, *ou si, cette somme étant variable, elle tend vers la limite* S, *et que*

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_m$$

désignent des infiniment petits, la somme

$$\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \ldots + \alpha_m \varepsilon_m$$

tendra vers la limite zéro ou sera infiniment petite.

En effet, désignons par ε celui des infiniment petits $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ qui a la plus grande valeur absolue; la somme $\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \ldots + \alpha_m \varepsilon_m$ aura une valeur absolue moindre que $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)\varepsilon$. Or ce produit est infiniment petit, car le premier facteur a une limite

finie, tandis que le facteur ε est infiniment petit ; donc la somme

$$\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \ldots + \alpha_m \varepsilon_m$$

est elle-même infiniment petite.

Corollaire. — *La limite de la somme d'un nombre infiniment grand de quantités positives infiniment petites n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec elles ont respectivement pour limite l'unité.*

Soient

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$$

les infiniment petits proposés,

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m$$

d'autres infiniment petits dont les rapports aux premiers respectivement aient pour limite l'unité. On aura

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 + \varepsilon_1, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1 + \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \frac{\beta_m}{\alpha_m} = 1 + \varepsilon_m,$$

ou

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_1 \varepsilon_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_2 \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \beta_m = \alpha_m + \alpha_m \varepsilon_m;$$

or, d'après notre principe, si l'on a

$$\lim(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m) = S,$$

on a aussi

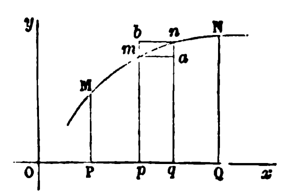
$$\lim(\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \ldots + \alpha_m \varepsilon_m) = 0;$$

donc

$$\lim(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m) = S.$$

10. On ne tardera pas à rencontrer les applications du premier principe de la méthode infinitésimale. Le deuxième principe se rapporte spécialement au calcul intégral ; il ne sera pas inutile d'en indiquer l'application que les anciens en ont faite à la quadrature des courbes.

QUADRATURE DES COURBES PLANES. — Considérons une courbe rapportée à deux axes de coordonnées rectilignes et cherchons l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des

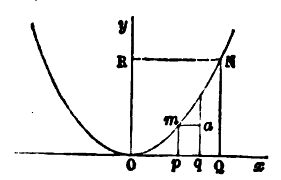


abscisses et deux ordonnées MP, NQ. Supposons d'abord que l'ordonnée de la courbe croisse constamment ou décroisse constamment depuis le point M jusqu'au point N. Décomposons la partie PQ de l'axe des x en un nombre infiniment grand de parties égales ou inégales, mais toutes infiniment petites; puis menons par les points de division des parallèles à l'axe des y. L'aire MPQN, qu'il faut évaluer, sera décomposée en un nombre infiniment grand de parties infiniment petites, telles que $mpqn$. Or, si l'on mène ma et nb parallèles à l'axe des x, on formera deux parallélogrammes $mpqa$, $bpqn$, qui seront l'un supérieur et l'autre inférieur à l'aire $mpqn$, et dont le rapport $\frac{mp}{nq}$ a évidemment pour limite l'unité. On conclut de là que le rapport de $mpqn$ à l'un des deux parallélogrammes, à $mpqa$ par exemple, a pour limite l'unité. Donc, d'après notre deuxième principe, l'aire qu'il faut évaluer sera la limite de la somme des parallélogrammes intérieurs $mpqa$ où celle de la somme des parallélogrammes extérieurs $bpqn$. Ainsi, en posant $mp = y$, $pq = h$, et en désignant par θ l'angle des axes, l'aire demandée S sera exprimée par la formule

$$S = \sin\theta . \lim \sum y h.$$

Si l'ordonnée de la courbe est tantôt croissante, tantôt décroissante, on peut la décomposer en plusieurs parties satisfaisant chacune à la condition que nous venons d'imposer; la formule précédente étant applicable à chaque partie, elle a lieu aussi pour leur somme. Cette formule subsiste, même quand l'ordonnée y change de signe, dans le passage du point M au point N, pourvu qu'on regarde comme négatives les aires des surfaces situées du côté des y négatives; il suffit, pour s'en convaincre, de pratiquer ici la décomposition de l'aire considérée en plusieurs parties, comme dans le cas que nous venons d'examiner.

11. Exemple. — Considérons le cas de la parabole.



Cette courbe, rapportée à son axe et à la tangente au sommet, a pour équation

$$y = \frac{x^2}{2p},$$

p étant le paramètre. Supposons qu'on demande l'aire NOQ $= S$ comprise entre la courbe, la tangente Ox et l'ordonnée NQ $= y$. Décomposons l'abscisse OQ $= x$ en m parties égales; soit $pq = \frac{x}{m}$ l'une de ces parties; si l'on suppose $Op = \frac{n}{m}x$, on aura $mp = \frac{n^2}{m^2}y$, et l'aire demandée S sera

$$S = \lim \sum mpqa = \lim \sum_{n=1}^{n=m-1} \frac{n^2 xy}{m^3} = xy \lim \sum_{n=1}^{n=m-1} \frac{n^2}{m^3}.$$

Or on a

$$\sum_{n=1}^{n=m-1} n^2 = \frac{m\left(m-\frac{1}{2}\right)(m-1)}{3};$$

donc

$$S = \frac{1}{3}\,xy.\lim\left(1-\frac{1}{2m}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right),$$

ou

$$S = \frac{1}{3}\,xy.$$

Si l'on mène la perpendiculaire NR à Oy, on formera un rectangle OQNR qui sera partagé par la parabole en deux parties dans le rapport de 1 à 2.

CHAPITRE II.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE INDÉPENDANTE.

De la continuité.

12. Une fonction $f(x)$ de la variable x est dite *continue* pour les valeurs de x comprises entre deux limites x_0 et X, lorsque, pour toutes ces valeurs de x, la valeur absolue de la différence

$$f(x+h)-f(x)$$

décroît indéfiniment avec h, ou est infiniment petite en même temps que h.

Si la fonction $f(x)$ devient infinie pour une valeur de x comprise entre x_0 et X, elle ne satisfait pas à la précédente définition de la continuité; on dit alors qu'elle devient *discontinue* en passant par l'infini.

Des dérivées.

13. La fonction $f(x)$ étant supposée continue pour les valeurs de x comprises entre x_0 et X, les accroissements correspondants

$$h \quad \text{et} \quad f(x+h)-f(x)$$

sont en même temps infiniment petits, comme nous venons de le dire. La limite du rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

de ces accroissements est en général une quantité déterminée indépendante du signe de h; elle dépend de la valeur attribuée à x et, en conséquence, elle est une fonction de cette variable. On lui a donné le nom de *dérivée* de la fonction $f(x)$, et nous la représenterons, avec Lagrange, par la notation $f'(x)$; ainsi l'on aura

$$(1) \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon,$$

ou

$$(2) \qquad f(x+h) - f(x) = hf'(x) + h\varepsilon,$$

ε désignant une quantité infiniment petite en même temps que h.

Il peut arriver que, pour certaines valeurs particulières de x, la limite du rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

dépende du signe que l'on attribue à h en faisant tendre cette quantité vers zéro; dans ce cas, la dérivée de la fonction cesse d'être déterminée.

D'après ce qui précède, si l'on prend h pour infiniment petit principal, l'accroissement

$$f(x+h) - f(x)$$

sera un infiniment petit du premier ordre, à moins que la dérivée $f'(x)$ ne soit nulle ou infinie. On verra plus loin que cette circonstance ne peut se présenter que pour certaines valeurs particulières attribuées à x. Lorsque $f'(x)$ s'annule, l'accroissement de la fonction est d'un ordre infinitésimal supérieur à 1; cet ordre est au contraire inférieur à 1, quand $f'(x)$ devient infinie.

14. La simple notion de la dérivée conduit à plusieurs propositions importantes que nous allons établir.

THÉORÈME I. — *Soit $f(x)$ une fonction de x qui reste continue pour les valeurs de x comprises entre des limites données, et qui, pour ces valeurs, ait une dérivée $f'(x)$ déterminée. Si x_0 et X désignent deux valeurs de x comprises entre les mêmes limites, on aura*

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'(x_1),$$

x_1 étant une valeur comprise entre x_0 et X.

En effet, le rapport

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$$

a, par hypothèse, une valeur finie; et, si l'on nomme A cette valeur, on aura

$$(1) \qquad [f(X) - AX] - [f(x_0) - Ax_0] = 0.$$

Désignons par $\varphi(x)$ la fonction de x définie par la formule

$$(2) \qquad \varphi(x) = [f(x) - Ax] - [f(x_0) - Ax_0],$$

on aura, à cause de l'égalité (1),

$$\varphi(x_0) = 0, \quad \varphi(X) = 0,$$

en sorte que $\varphi(x)$ s'annule pour $x = x_0$ et pour $x = X$. Supposons, pour fixer les idées, $X > x_0$ et faisons croître x de x_0 à X; la fonction $\varphi(x)$ est d'abord nulle. Si l'on admet qu'elle ne soit pas constamment nulle, pour les valeurs de x comprises entre x_0 et X, il faudra qu'elle commence à croître en prenant des valeurs positives, ou à décroître en prenant des valeurs négatives, soit à partir de $x = x_0$, soit à partir d'une valeur de x comprise entre x_0 et X. Si les valeurs dont il s'agit sont positives, comme $\varphi(x)$ est continue et qu'elle doit s'annuler pour

$x = X$, il est évident qu'il y aura une valeur x_1 entre x_0 et X telle, que

$$\varphi(x_1)$$

sera supérieure ou au moins égale aux valeurs voisines

$$\varphi(x_1 - h), \quad \varphi(x_1 + h),$$

h étant une quantité aussi petite que l'on voudra. Si la fonction $\varphi(x)$, en cessant d'être nulle, prend des valeurs négatives, le même raisonnement prouve qu'il existe une valeur x_1 entre x_0 et X telle, que

$$\varphi(x_1)$$

sera inférieure ou au plus égale aux valeurs voisines

$$\varphi(x_1 - h), \quad \varphi(x_1 + h).$$

Ainsi, dans l'un et l'autre cas, la valeur de x_1 sera telle, que les différences

$$\varphi(x_1 - h) - \varphi(x_1), \quad \varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)$$

seront de même signe, et, par suite, les rapports

$$(3) \qquad \frac{\varphi(x_1 - h) - \varphi(x_1)}{-h}, \quad \frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h}$$

seront de signes contraires.

Il faut remarquer que nous n'excluons pas l'hypothèse dans laquelle l'un des rapports précédents se réduit à zéro, ce qui exige que la fonction $\varphi(x)$ conserve la même valeur pour les valeurs de x comprises dans un intervalle fini. En particulier, si la fonction $\varphi(x)$ est constamment nulle pour les valeurs de x comprises entre x_0 et X, les rapports (3) sont nuls l'un et l'autre.

Les rapports (3) tendent vers la même limite quand h tend vers zéro, car nous admettons que la fonction $f(x)$ a une dérivée déterminée, et la même chose a lieu, en

conséquence, à l'égard de $\varphi(x)$; d'ailleurs ces rapports sont de signes contraires : donc leur limite est zéro. Ainsi l'on a

$$\lim \frac{\varphi(x_1+h)-\varphi(x_1)}{h}=0,$$

ou, à cause de l'équation (2),

$$\lim \left[\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}-A\right]=0,$$

c'est-à-dire

$$A=\lim \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}=f'(x_1).$$

On a donc

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{X-x_0}=f'(x_1),$$

ou

$$(4)\qquad f(X)-f(x_0)=(X-x_0)f'(x_1),$$

comme on l'avait annoncé.

Nous avons supposé $X>x_0$; mais, comme la formule précédente ne change pas par la permutation des lettres x_0, X, elle est évidemment indépendante de cette hypothèse.

Si l'on fait

$$X=x_0+h,$$

la quantité x_1, comprise entre x_0 et x_0+h, pourra être représentée par $x_0+\theta h$, θ étant une quantité comprise entre zéro et 1; on peut donc écrire

$$(5)\qquad f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h).$$

Remarque. — La démonstration qui précède est due à M. Ossian Bonnet. Il faut remarquer qu'elle ne suppose en aucune façon la continuité de la dérivée $f'(x)$; elle exige seulement que cette dérivée existe et ait une valeur déterminée.

15. Théorème II. — *Si la fonction $f(x)$ est constante pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la dérivée $f'(x)$ est nulle pour les mêmes valeurs de x. Réciproquement, si la dérivée $f'(x)$ est nulle pour les valeurs de x comprises entre deux limites, la fonction $f(x)$ a une valeur constante pour les valeurs de x comprises entre les mêmes limites.*

1° Supposons que la fonction $f(x)$ soit constante pour les valeurs de x comprises entre deux limites données, et soient x_0, x_0+h deux de ces valeurs de x, on aura

$$f(x_0+h)-f(x_0)=0, \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0,$$

et, en passant à la limite,

$$f'(x_0)=0.$$

2° Supposons que $f'(x)$ soit nulle pour les valeurs de x comprises entre deux limites données, et soient x_0 et x_0+h deux valeurs quelconques de x comprises entre ces limites, on aura (n° **14**)

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h),$$

$x_0+\theta h$ étant une valeur comprise entre les limites données. Le second membre de cette formule est nul, par hypothèse, et l'on a

$$f(x_0+h)=f(x_0);$$

la fonction $f(x)$ a donc une valeur constante.

Corollaire. — *Lorsque deux fonctions $f(x)$, $F(x)$ de la variable x ne diffèrent que par une constante, pour les valeurs de x comprises entre deux limites données, les dérivées de ces fonctions sont égales entre elles pour les mêmes valeurs de x. Réciproquement, si les dérivées $f'(x)$, $F'(x)$ de deux fonctions $f(x)$, $F(x)$*

sont égales entre elles pour toutes les valeurs de x comprises entre des limites données, les fonctions ne diffèrent que par une constante, pour ces mêmes valeurs de x.

En effet, désignons par $\varphi(x)$ la différence des fonctions $f(x)$ et $F(x)$; on aura

$$\varphi(x)=f(x)-F(x), \quad \varphi(x+h)=f(x+h)-F(x+h),$$

et, par conséquent,

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{F(x+h)-F(x)}{h};$$

en passant à la limite, il vient, pour $h=0$,

$$\varphi'(x)=f'(x)-F'(x).$$

Cela posé, si $\varphi(x)$ est constante, $\varphi'(x)$ est nulle; donc les dérivées $f'(x)$ et $F'(x)$ sont égales entre elles.

Réciproquement, si $f'(x)$ et $F'(x)$ sont égales entre elles, $\varphi'(x)$ est nulle : donc $\varphi(x)$ est une constante.

16. Théorème III. — *Si la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$ reste finie pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites x_0 et $X > x_0$, et que l'on fasse croître x de x_0 à X, la fonction $f(x)$ croîtra tant que la dérivée $f'(x)$ ne sera pas négative, et elle décroîtra tant que $f'(x)$ ne sera pas positive.*

En effet, x étant comprise entre x_0 et X, le rapport

$$\frac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}$$

a pour limite $f'(x)$, qui est une quantité finie; il aura donc le signe de cette limite pour toutes les valeurs de h comprises entre zéro et une quantité positive ε suffisam-

ment petite. Par conséquent, on aura, pour les mêmes valeurs de h,

$$f(x-h)<f(x)<f(x+h)$$

si $f'(x)$ est >0, et

$$f(x-h)>f(x)>f(x+h)$$

si $f'(x)$ est <0.

Ainsi la fonction $f(x)$ ira en croissant à partir de chaque valeur de x pour laquelle $f'(x)$ est >0, tandis qu'elle ira en décroissant à partir de chaque valeur telle que $f'(x)$ soit <0.

Mais il peut arriver que la dérivée $f'(x)$ s'annule pour une ou plusieurs valeurs de x comprises entre x_0 et X. On peut supposer qu'il n'y ait qu'une valeur de cette espèce, car on ramène à ce cas celui où il y en aurait plusieurs, en décomposant l'intervalle de x_0 à X en plusieurs autres. Alors, si l'on désigne par a la valeur de x qui annule $f'(x)$ et par h une quantité aussi petite que l'on voudra, on fera croître x de x_0 à $a-h$, puis de $a+h$ à X, et le signe de la dérivée $f'(x)$ indiquera le sens de la variation de la fonction dans chaque intervalle, quelque petite que soit la quantité h. Faisant tendre ensuite h vers zéro, on voit que, si la dérivée $f'(x)$ ne change pas de signe en s'annulant, la fonction $f(x)$ continuera à varier dans le même sens, tandis que, si $f'(x)$ change de signe en s'annulant, la fonction $f(x)$ deviendra croissante ou décroissante selon qu'elle était décroissante ou croissante. Dans ce cas on dit qu'elle passe par un minimum ou par un maximum.

17. Le théorème du n° 14 est susceptible d'être généralisé; il est effectivement compris dans la proposition

suivante, dont on verra plus loin d'importantes applications :

THÉORÈME IV. — *Soient $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions de x qui restent continues pour les valeurs de x comprises entre des limites données, et qui, pour ces valeurs, aient des dérivées déterminées $f'(x)$, $F'(x)$. Si x_0 et X désignent deux valeurs de x comprises entre les mêmes limites, et que la dérivée $F'(x)$, qui peut être nulle ou infinie pour $x=x_0$ ou pour $x=X$, ne le soit pas pour les valeurs intermédiaires, on aura*

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{F(X)-F(x_0)}=\frac{f'(x_1)}{F'(x_1)},$$

x_1 étant une valeur comprise entre x_0 et X.

Nous emploierons ici le raisonnement qui nous a déjà servi à établir le théorème I. Posons

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{F(X)-F(x_0)}=A,$$

on aura

$$(1)\qquad [f(X)-A\,F(X)]-[f(x_0)-A\,F(x_0)]=0,$$

d'où il résulte que la fonction

$$(2)\qquad \varphi(x)=[f(x)-A\,F(x)]-[f(x_0)-A\,F(x_0)],$$

qui est nulle pour $x=x_0$, s'annule aussi pour $x=X$. Si cette fonction n'est pas constamment nulle, quand x varie de x_0 à X, elle croîtra ou décroîtra soit à partir de $x=x_0$, soit à partir d'une valeur comprise entre x_0 et X; mais, si elle commence par croître, elle devra décroître ensuite, et inversement, puisqu'elle redevient nulle pour $x=X$, et qu'elle est continue. Il y aura donc une valeur x_1 de x comprise entre x_0 et X, telle, que les différences

$$\varphi(x_1-h)-\varphi(x_1),\quad \varphi(x_1+h)-\varphi(x_1)$$

seront nulles ou de même signe pour les valeurs de h comprises entre zéro et une certaine limite aussi petite que l'on voudra. Les quotients

$$\frac{\varphi(x_1 - h) - \varphi(x_1)}{-h}, \quad \frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h}$$

seront donc de signes contraires, ce qui exige que leur limite soit zéro, car la fonction $\varphi(x)$ a, par hypothèse, une dérivée déterminée. Ainsi l'on a

$$\lim \frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h} = 0,$$

ou, à cause de la formule (2),

$$\lim \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} - \text{A} \lim \frac{\text{F}(x_1 + h) - \text{F}(x_1)}{h} = 0,$$

ou

$$f'(x_1) - \text{A}\,\text{F}'(x_1) = 0.$$

La valeur x_1 ne peut être égale ni à x_0 ni à X; d'ailleurs, par hypothèse, la dérivée $\text{F}'(x)$ ne peut être nulle ou infinie pour les valeurs de x intermédiaires entre x_0 et X; on a donc

$$\frac{f'(x_1)}{\text{F}'(x_1)} = \text{A},$$

et, par conséquent,

$$\frac{f(\text{X}) - f(x_0)}{\text{F}(\text{X}) - \text{F}(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{\text{F}'(x_1)}.$$

Si l'on pose

$$\text{X} = x_0 + h,$$

h étant une quantité positive ou négative, on aura

$$x_1 = x_0 + \theta h,$$

θ étant une quantité comprise entre zéro et 1; alors la

formule précédente deviendra

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{F(x_0+h)-F(x_0)}=\frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)}.$$

Des différentielles.

18. Nous emploierons la caractéristique Δ pour désigner les accroissements des fonctions. Ainsi l'accroissement que prend la fonction $f(x)$, quand on donne à x l'accroissement h ou Δx, sera représenté par

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x),$$

et l'on aura, en conséquence,

$$(1)\qquad \Delta f(x)=hf'(x)+h\varepsilon,$$

ε étant infiniment petit en même temps que h.

La première partie $hf'(x)$ de cet accroissement est dite la *différentielle* de la fonction $f(x)$; on désigne cette différentielle au moyen de la *caractéristique* d, et l'on écrit

$$(2)\qquad df(x)=hf'(x).$$

On voit que, si l'accroissement arbitraire h est infiniment petit, les quantités $\Delta f(x)$ et $df(x)$ sont des infiniment petits susceptibles d'être substitués l'un à l'autre, conformément à la méthode que nous avons exposée, dans les rapports ou dans les sommes dont on peut avoir à chercher les limites. On a effectivement

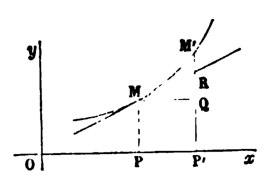
$$\frac{\Delta f(x)}{df(x)}=1+\frac{\varepsilon}{f'(x)},$$

et, par suite,

$$\lim\frac{\Delta f(x)}{df(x)}=1,$$

tant que $f'(x)$ reste finie.

19. On peut donner une représentation géométrique très-simple de l'accroissement $\Delta f(x)$ et de la différentielle $d\,f(x)$. Considérons à cet effet deux axes rectilignes de coordonnées, et construisons la courbe dont l'ordonnée



est $f(x)$. Menons la tangente au point M dont les coordonnées sont x et $f(x)$; construisons l'ordonnée M'P', qui répond à l'abscisse $x+h$ et qui coupe en R la tangente en M; menons enfin MQ parallèle à l'axe des abscisses. La dérivée $f(x)$, limite du rapport $\frac{\Delta f(x)}{h}$, est, comme nous l'avons déjà dit (n° 6), le coefficient d'inclinaison de la tangente MR, et l'on a

$$\Delta f(x) = M'Q = RQ + M'R,$$
$$df(x) = hf'(x) = RQ;$$

et, par conséquent,

$$h\varepsilon = M'R;$$

il suit de là que M'R est d'un ordre infinitésimal supérieur au premier.

20. Dans le cas particulier où la fonction $f(x)$ se réduit à

$$f(x) = x,$$

on a

$$\Delta f(x) = \Delta x = h, \quad \frac{\Delta f(x)}{h} = 1,$$

et, par suite,

$$f'(x) = 1.$$

Alors la formule (2) devient

$$dx = h,$$

et, en conséquence, cette formule (2) peut être remplacée, dans le cas général, par

$$(3) \qquad df(x) = f'(x)dx.$$

On voit, en résumé, que *la différentielle d'une fonction est égale à la dérivée de cette fonction multipliée par la différentielle de la variable indépendante;* quant à cette dernière différentielle, elle n'est autre chose qu'un *accroissement arbitraire attribué à la variable indépendante.*

Si l'on divise la formule (3) par dx, il viendra

$$(4) \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

ce qui exprime que *la dérivée d'une fonction est le rapport de la différentielle de cette fonction à la différentielle de la variable.*

Cette manière de représenter les dérivées est la plus usitée. Ainsi l'expression $\frac{df(x)}{dx}$ peut être indifféremment considérée à deux points de vue, soit comme exprimant le quotient de $df(x)$ par dx, soit comme un symbole représentant la limite du rapport $\frac{\Delta f(x)}{h}$ ou $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Aussi écrit-on ordinairement la formule (3) comme il suit :

$$df(x) = \frac{df(x)}{dx} dx,$$

ou

$$dy = \frac{dy}{dx} dx,$$

en représentant par une seule lettre y la fonction que nous avons désignée jusqu'ici par $f(x)$.

Théorème relatif aux fonctions de fonctions.

21. Soient u, x, y trois variables et supposons que deux d'entre elles dépendent de la troisième. Si l'on a exprimé la valeur de y en fonction de u, de manière que l'on ait

$$y=f(u),$$

puis que l'on choisisse x pour variable indépendante, y sera dite une *fonction de fonction* de la variable indépendante x.

Cela posé, nous établirons la proposition suivante, qu'on doit regarder comme fondamentale :

THÉORÈME. — *Si l'on a*

$$y=f(u),$$

on aura aussi

$$dy=f'(u)\,du,$$

quelle que soit la variable indépendante.

En effet, la variable indépendante étant désignée par x, attribuons à cette variable l'accroissement Δx, et désignons par Δu, Δy les accroissements correspondants de u et de y ; on aura identiquement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Faisons tendre Δx vers zéro, les limites de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ seront respectivement $\frac{dy}{dx}$, $\frac{du}{dx}$; d'ailleurs la limite du rapport

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}$$

est égale à $f'(u)$; on a donc

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\,\frac{du}{dx}.$$

Les expressions $\frac{dy}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ peuvent être regardées comme les quotients de dy, du par dx; on a donc, en supprimant le dénominateur dx,

$$dy = f'(u)\,du,$$

comme si u était la variable indépendante. On écrit encore le plus souvent

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du \quad \text{ou} \quad dy = \frac{\partial f(u)}{\partial u}\,du,$$

∂y étant la différentielle de la fonction y considérée comme dépendante d'une variable arbitraire u et ∂u l'accroissement arbitraire de cette variable.

Objet du Calcul différentiel. — Différentiation des fonctions algébriques explicites.

22. L'opération par laquelle on détermine la différentielle d'une fonction est dite *différentiation.*

Le Calcul différentiel a pour objet principal les règles de la différentiation des fonctions.

Nous examinerons d'abord les cas simples dans lesquels la fonction proposée est composée *algébriquement* au moyen d'une ou de plusieurs fonctions dont les différentielles sont supposées connues.

23. Différentiation d'une somme. — Considérons la fonction

$$y = \pm u \pm u_1 \pm u_2 \pm \ldots \pm u_{m-1},$$

$u, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ étant des fonctions de la variable indépendante x dont les différentielles sont supposées connues.

Donnons à x l'accroissement Δx, et soient

$$\Delta y, \quad \Delta u, \quad \Delta u_1, \ldots, \quad \Delta u_{m-1}$$

les accroissements correspondants des variables

$$y, \quad u, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_{m-1};$$

on aura évidemment

$$\Delta y = \pm \Delta u \pm \Delta u_1 \pm \ldots \pm \Delta u_{m-1},$$

et, en divisant par Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta u_1}{\Delta x} \pm \ldots \pm \frac{\Delta u_{m-1}}{\Delta x}.$$

Passons maintenant aux limites, on aura

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{du}{dx} \pm \frac{du_1}{dx} \pm \ldots \pm \frac{du_{m-1}}{dx},$$

et, en multipliant de part et d'autre par dx,

$$dy = \pm du_1 \pm du_2 \pm \ldots \pm du_{m-1}.$$

Il suit de là que *la différentielle d'une somme algébrique de fonctions est égale à la somme des différentielles de ces fonctions.*

24. Différentiation d'un produit. — 1° Soit d'abord

$$y = au,$$

a étant une constante et u une fonction de x. Désignons par Δu, Δy les accroissements que prennent u et y quand on donne à x l'accroissement Δx, on aura

$$\Delta y = a\,\Delta u,$$

puis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\,\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Passant aux limites, il vient

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx},$$

et, en multipliant par dx,

$$dy = a\,du.$$

Ainsi *la différentielle du produit d'une fonction par une constante est égale au produit de la différentielle de la fonction par la constante.*

2° Considérons en deuxième lieu le produit

$$y = uv,$$

u et v étant deux fonctions de x. Soient Δu, Δv, Δy les accroissements que prennent u, v, y quand on donne à x l'accroissement Δx; on aura

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\,\Delta v,$$

et, en divisant par Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x.$$

Passant aux limites, on voit que le dernier terme du second membre s'évanouit, et l'on a

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx},$$

ou, en multipliant par dx,

$$dy = v\,du + u\,dv.$$

Ainsi *la différentielle du produit de deux fonctions est égale à la somme des deux produits que l'on obtient en multipliant chaque fonction par la différentielle de l'autre.*

En divisant la formule précédente par le produit y ou uv, on obtient

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}.$$

Le rapport de la différentielle d'une fonction à cette fonction a reçu le nom de *différentielle logarithmique*. Alors notre formule exprime que :

La différentielle logarithmique d'un produit de deux facteurs est égale à la somme des différentielles logarithmiques des facteurs.

Cette propriété, analogue à celle des logarithmes, justifie la dénomination de *différentielle logarithmique*.

3° Considérons enfin le produit d'un nombre quelconque de fonctions de la variable indépendante x, et soit

$$y = uu_1u_2\ldots u_{m-1}$$

ce produit.

En appliquant la règle qui se rapporte à la différentiation logarithmique du produit de deux fonctions, on aura

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y} &= \frac{du}{u} + \frac{d(u_1u_2\ldots u_{m-1})}{u_1u_2\ldots u_{m-1}} \\
&= \frac{du}{u} + \frac{du_1}{u_1} + \frac{d(u_2\ldots u_{m-1})}{u_2\ldots u_{m-1}} \\
&= \frac{du}{u} + \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \frac{d(\ldots u_{m-1})}{\ldots u_{m-1}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{aligned}$$

la dernière de ces égalités, savoir

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \ldots + \frac{du_{m-1}}{u_{m-1}},$$

exprime que *la différentielle logarithmique d'un pro-*

duit de m fonctions est égale à la somme des différentielles logarithmiques de ces fonctions.

Pour avoir la différentielle dy, il suffit de multiplier la formule précédente par y, et il vient alors

$$dy = u_1 u_2 \ldots u_{m-1} du + u u_2 \ldots u_{m-1} du_1 + \ldots + u u_1 \ldots u_{m-2} du_{m-1}.$$

25. Différentiation d'un quotient. — u et v étant deux fonctions de x, considérons le quotient

$$y = \frac{u}{v};$$

on aura

$$yv = u.$$

La différentielle logarithmique du produit yv est égale à la différentielle logarithmique de u; on a donc

$$\frac{dy}{y} + \frac{dv}{v} = \frac{du}{u},$$

ou

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v};$$

par conséquent :

La différentielle logarithmique du quotient de deux fonctions est égale à la différentielle logarithmique du dividende moins la différentielle logarithmique du diviseur.

En multipliant la formule précédente par y ou $\frac{u}{v}$, on obtient

$$dy = \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} dv,$$

ou

$$dy = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

26. Différentiation des puissances d'une fonction. — Soit u une fonction de x et considérons la puissance

$$(1) \qquad y = u^m,$$

l'exposant m étant une constante.

1° Si m est un entier positif, y est le produit de m facteurs égaux à u; par suite, la différentielle logarithmique de y sera égale à la somme des différentielles logarithmiques de ces facteurs; on aura donc

$$(2) \qquad \frac{dy}{y} = m\frac{du}{u}.$$

2° Si m est un nombre fractionnaire positif, soit i son dénominateur, on aura

$$y^i = u^{mi}.$$

La différentielle logarithmique de y^i est $i\frac{dy}{y}$, celle de u^{mi} est $mi\frac{du}{u}$, car mi est un nombre entier; on a donc

$$i\frac{dy}{y} = mi\frac{du}{u},$$

et, en supprimant le facteur i, on retrouve la formule (2).

3° Si m est un nombre négatif entier ou fractionnaire, on aura par la formule (1)

$$yu^{-m} = 1.$$

La fonction yu^{-m} étant constante, sa différentielle est nulle et sa différentielle logarithmique $\frac{dy}{y} + \frac{d(u^{-m})}{u^{-m}}$ l'est aussi. D'ailleurs, $-m$ étant un nombre positif, $\frac{d(u^{-m})}{u^{-m}}$ est égal à $-m\frac{du}{u}$; donc on a

$$\frac{dy}{y} - m\frac{du}{u} = 0,$$

ce qui n'est autre chose que la formule (2).

Ainsi la formule (2) est générale et elle subsiste quel que soit l'exposant constant m. En la multipliant par la formule (1), il vient

$$(3) \qquad dy = m u^{m-1} du.$$

Il résulte de là que *la différentielle de la puissance de degré m d'une fonction est égale au produit de l'exposant m par la puissance de degré m — 1 de la fonction et par la différentielle de cette fonction.*

Si la fonction u se réduit à la variable indépendante x, on a

$$y = x^m$$

et

$$dy = m x^{m-1} dx.$$

Il faut remarquer le cas de $m = \frac{1}{2}$ qui se présente fréquemment. Alors la formule (1) devient

$$y = \sqrt{u},$$

et la formule (3) donne

$$dy = \frac{du}{2\sqrt{u}}.$$

Applications des règles précédentes.

27. Toute fonction algébrique explicite peut s'obtenir en exécutant sur la variable x et sur des constantes un nombre limité d'opérations algébriques; on pourra donc toujours calculer la différentielle d'une telle fonction par le moyen des règles que nous venons d'établir. Nous allons présenter ici quelques exemples.

1° Soit

$$y = Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots,$$

A, B, C, ... étant des constantes données, ainsi que

$m, n, p, \ldots$. On aura immédiatement, par l'application des règles relatives à l'addition, à la multiplication et à l'élévation aux puissances,

$$dy = (mAx^{m-1} + nBx^{n-1} + pCx^{p-1} + \ldots)\,dx.$$

2° Soit

$$y = a + b\sqrt{x} + \frac{c}{\sqrt{x}} + \frac{e}{x},$$

a, b, c, e étant des constantes. On peut écrire

$$y = a + bx^{\frac{1}{2}} + cx^{-\frac{1}{2}} + ex^{-1};$$

on est alors dans le cas que nous venons d'examiner et l'on a

$$dy = \left(\frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}cx^{-\frac{3}{2}} - ex^{-2}\right)dx,$$

ou

$$dy = \left(\frac{b}{2\sqrt{x}} - \frac{c}{2x\sqrt{x}} - \frac{e}{x^2}\right)dx.$$

3° Soit

$$y = x^2(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2},$$

a étant une constante.

On peut écrire

$$y = (a^2x^2 + x^4)\sqrt{a^2 - x^2},$$

puis

$$\begin{aligned} dy &= \sqrt{a^2 - x^2}\,.\,d(a^2x^2 + x^4) + (a^2x^2 + x^4)\,d\sqrt{a^2 - x^2} \\ &= \sqrt{a^2 - x^2}\,(2a^2x + 4x^3)\,dx - (a^2x^2 + x^4)\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \end{aligned}$$

ou

$$dy = \frac{(2a^4 + a^2x^2 - 5x^4)\,x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

4° Soit

$$y = (ax^m + b)^n,$$

a, b, m, n étant des constantes.

On a

$$dy = n(ax^m + b)^{n-1} d(ax^m + b)$$

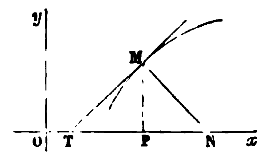
ou

$$dy = mnax^{m-1}(ax^m + b)^{n-1} dx.$$

Application à quelques problèmes simples.

28. Les règles précédentes suffisent pour résoudre quelques problèmes; il ne sera pas inutile d'en donner des exemples. Ceux que nous allons présenter sont empruntés à la Géométrie, et il nous faut rappeler d'abord des locutions usitées dans la théorie des courbes. Lorsqu'une courbe est rapportée à deux axes de coordonnées rectilignes, si l'on mène par l'un de ses points la tangente et la normale, les parties de ces lignes comprises entre le point de la courbe et l'axe des abscisses sont dites respectivement *longueur de la tangente, longueur de la normale;* en outre, les projections des mêmes lignes sur l'axe des abscisses prennent le nom de *sous-tangente* et de *sous-normale.*

29. Problème I. — *Trouver la courbe dans laquelle la sous-normale est égale à une constante donnée p.*



Soient x et y les coordonnées rectangulaires d'un point M de la courbe cherchée; y peut être regardée comme une fonction de x, et c'est cette fonction qu'il faut trouver. Menons l'ordonnée MP du point M et la normale MN, la sous-normale PN est égale à l'ordonnée MP $= y$ multipliée par la tangente de l'angle PMN. Mais cet angle

est égal à l'angle MTx que la tangente en M à la courbe fait avec l'axe des abscisses : il a donc pour tangente $\frac{dy}{dx}$. Ainsi la condition du problème est exprimée par l'équation

$$y\frac{dy}{dx} = p$$

ou

$$2y\,dy = 2p\,dx.$$

Le premier membre de cette équation est la différentielle de y^2, d'après le principe fondamental du n° 21 ; le second membre est la différentielle de $2px$. Nous avons donc deux fonctions de x, savoir

$$y^2 \quad \text{et} \quad 2px,$$

qui ont des différentielles égales ou, ce qui revient au même, des dérivées égales ; donc ces fonctions ne peuvent différer que par une constante, et l'on a

$$y^2 = 2px + C,$$

C étant une constante arbitraire.

Les paraboles de paramètre p, et dont l'axe coïncide avec la droite sur laquelle on compte les sous-normales, sont donc les seules courbes qui répondent à la question.

30. PROBLÈME II. — *Trouver la courbe dans laquelle la normale est égale à une constante donnée a.*

On voit sur la figure du n° 29 que le carré de la normale est égal au carré de la sous-normale $y\frac{dy}{dx}$ plus le carré de l'ordonnée ; on a donc

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a^2.$$

Cette équation est satisfaite quand on pose $y = \pm a$,

car il en résulte $\frac{dy}{dx} = 0$; les deux droites menées parallèlement à l'axe des x, à une distance a de cet axe, constituent donc une première solution du problème.

Faisant abstraction de cette solution, nous tirons de l'équation précédente

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}};$$

quel que soit le signe avec lequel nous prenions le radical $\sqrt{a^2 - y^2}$, le second membre de la formule précédente est la différentielle de $-\sqrt{a^2 - y^2}$; par conséquent cette formule exprime que les deux fonctions de x

$$x \quad \text{et} \quad -\sqrt{a^2 - y^2}$$

ont la même différentielle. Ces fonctions ne peuvent donc différer que par une constante α, et l'on a

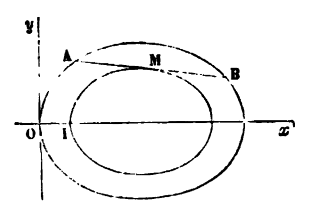
$$x - \alpha = -\sqrt{a^2 - y^2},$$

d'où

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = a^2,$$

équation qui représente les cercles de rayon a dont les centres sont situés sur l'axe des abscisses.

31. Problème III. — *Étant donnée une section conique* OAB, *trouver la courbe* IM *telle, que chaque*



corde AB *de la conique, tangente à la courbe* IM, *soit divisée en deux parties égales au point de contact* M.

Soient

$$Y^2 = 2pX + qX^2$$

l'équation de la conique donnée, et

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

celle de la tangente au point M de la courbe inconnue. Si l'on élimine Y entre ces deux équations, il viendra

$$\left(\frac{dy^2}{dx^2} - q\right)X^2 + 2\left(y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy^2}{dx^2} - p\right)X + \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

La demi-somme des deux racines X de cette équation est

$$\frac{p - y\dfrac{dy}{dx} + x\dfrac{dy^2}{dx^2}}{\dfrac{dy^2}{dx^2} - q};$$

or, par l'énoncé du problème, cette demi-somme doit être égale à l'abscisse x du point M. On a donc

$$p + qx - y\frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$2y\,dy = 2p\,dx + 2qx\,dx;$$

le second membre de cette équation est la différentielle de $2px + qx^2$; le premier membre est la différentielle de y^2. Donc ces deux fonctions ne diffèrent que par une constante C, et l'on a

$$y^2 = 2px + qx^2 + C$$

pour l'équation générale des courbes demandées. On voit que ces courbes sont des coniques semblables à la proposée et qu'elles ont les mêmes axes principaux.

Théorème relatif à la différentiation des fonctions composées de plusieurs fonctions d'une variable indépendante.

32. Les résultats que nous avons obtenus précédemment sont compris, comme on va le voir, dans un théorème général relatif à la différentiation d'une fonction composée de plusieurs fonctions.

Si u et v sont deux fonctions de la variable indépendante x et que

$$y = f(u, v)$$

soit une fonction de u et de v, on dit que y est une fonction composée des deux fonctions u et v.

Désignons par $\varphi(u, v)$ la dérivée de $f(u, v)$ par rapport à u, c'est-à-dire la dérivée prise en considérant u comme une variable indépendante et v comme une constante; on aura

$$(1) \qquad f(u + \Delta u, v) - f(u, v) = [\varphi(u, v) + \alpha]\Delta u,$$

α étant une quantité qui s'évanouit avec l'accroissement Δu que nous attribuons à u. Désignons aussi par $\psi(u, v)$ la dérivée de $f(u, v)$, par rapport à v; on aura de même

$$f(u, v + \Delta v) - f(u, v) = [\psi(u, v) + \beta]\Delta v,$$

β s'annulant avec Δv. Si, dans cette dernière formule, on remplace u par $u + \Delta u$, β ne cessera pas de s'évanouir avec Δv; mais cette quantité prendra une valeur différente β', et l'on aura

$$(2)\ f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v) = [\psi(u + \Delta u, v) + \beta']\Delta v.$$

Supposons maintenant que Δu et Δv soient les accroissements que prennent les fonctions u et v quand on

donne à x l'accroissement Δx; désignons aussi par Δy l'accroissement correspondant de y, savoir :

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v),$$

on aura, en ajoutant les égalités (1) et (2),

$$\Delta y = [\varphi(u, v) + \alpha]\,\Delta u + [\psi(u + \Delta u, v) + 6']\,\Delta v,$$

et, en divisant par Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [\varphi(u, v) + \alpha]\frac{\Delta u}{\Delta x} + [\psi(u + \Delta u, v) + 6']\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Passons maintenant aux limites : α, $6'$ et Δu s'évanouissent; on a donc

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(u, v)\frac{du}{dx} + \psi(u, v)\frac{dv}{dx},$$

ou, en multipliant par dx,

$$dy = \varphi(u, v)\,du + \psi(u, v)\,dv.$$

Lorsqu'une fonction y dépend de deux variables arbitraires u et v, on représente par les symboles $\partial_u y$, $\partial_v y$ les différentielles de cette fonction, prises en ne faisant varier que l'une des deux quantités u ou v; si ∂u et ∂v sont les accroissements arbitraires attribués aux variables, les dérivées $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ seront égales respectivement aux deux quotients $\frac{\partial_u y}{\partial u}$, $\frac{\partial_v y}{\partial v}$. On supprime ordinairement les indices de la lettre ∂ dans les deux numérateurs; mais il ne faut pas oublier que les ∂y des numérateurs ont des significations différentes, indiquées sans ambiguïté par les dénominateurs. La différentielle de la fonction y considérée comme une fonction de x s'exprime par la formule

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv,$$

ou

$$dy = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} du + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} dv.$$

On représente aussi par $f'_u(u,v)$, $f'_v(u,v)$ les deux dérivées $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$; on a alors

$$dy = f'_u(u,v) du + f'_v(u,v) dv.$$

33. Le résultat que nous venons d'obtenir peut être généralisé bien aisément. Soient

$$u, v, w, s, \ldots$$

des fonctions de la variable indépendante x et

$$y = f(u, v, w, s, \ldots)$$

une fonction composée de ces diverses fonctions. Remplaçons celles-ci, à l'exception de la première, par leurs valeurs : on aura l'expression de y en u et x; on pourra donc appliquer la formule à laquelle nous sommes parvenu au numéro précédent, ce qui donnera

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + d'y,$$

formule où $d'y$ représente la différentielle de y prise en regardant u comme une constante. On aura pareillement

$$d'y = \frac{\partial y}{\partial v} dv + d''y,$$

$d''y$ étant la différentielle de y quand on regarde u et v comme des constantes, puis

$$d''y = \frac{\partial y}{\partial w} dw + d'''y,$$

$d'''y$ étant la différentielle de y prise en regardant u, v, w comme des constantes, et ainsi de suite. Il est évident qu'en ajoutant entre elles toutes les équations obtenues

de cette manière, on aura

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw + \frac{\partial y}{\partial s}ds + \ldots,$$

ou, en divisant par dx,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \ldots,$$

et l'on peut énoncer ce théorème :

Théorème. — *La différentielle d'une fonction composée de plusieurs fonctions est égale à la somme des différentielles que l'on obtient en regardant successivement chacune des fonctions composantes comme seule variable.*

34. Applications. — 1° Soit

$$y = Au + Bv + Cw + \ldots,$$

A, B, C, ... étant des constantes. Les dérivées $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \ldots$ sont égales respectivement aux constantes A, B, C, ...; on a donc

$$dy = A\,du + B\,dv + C\,dw + \ldots.$$

2° Soit

$$y = uvws\ldots;$$

ici les dérivées $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \ldots$ sont égales respectivement à

$$vws\ldots,\quad uws\ldots,\quad uvs\ldots,\quad \ldots;$$

on a donc

$$dy = (vws\ldots)du + (uws\ldots)dv + (uvs\ldots)dw + \ldots,$$

comme on l'a trouvé au n° 24; cette formule conduit,

comme on l'a vu (n° 26), à la règle de la différentiation des puissances.

3° Soit encore

$$y = \frac{u}{v} = uv^{-1},$$

on a

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v^{-1}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -uv^{-2};$$

donc

$$dy = v^{-1}du - uv^{-2}dv$$

ou

$$dy = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Conséquence du théorème précédent.

35. Toute fonction explicite y de la variable x s'obtient en effectuant successivement sur cette variable diverses opérations bien définies. Le nombre de ces opérations est limité et, s'il est supérieur à 1, la dernière opération devra être exécutée sur une ou plusieurs fonctions $u, v, w, \ldots$ déjà formées; ainsi l'on aura

$$y = f(u, v, w, \ldots).$$

Le théorème que nous avons établi ramène la différentiation de y à celles des fonctions plus simples $u, v, w, \ldots$, et à celle des fonctions de u, de v, de w, ..., représentées par le symbole f. Si les fonctions $u, v, w, \ldots$ ne s'obtiennent pas par une seule opération exécutée sur x, on pourra leur appliquer ce que nous venons de dire de y, et ainsi de suite. En sorte que la recherche de la différentielle de y se ramènera toujours à celle des différentielles de certaines fonctions *élémentaires* qu'on ne peut réduire à des fonctions plus simples. Les fonctions élémentaires ou irréductibles dont nous avons à nous occuper ici sont :

1° les fonctions qui résultent d'une seule opération algébrique exécutée sur la variable x, savoir $a \pm x$, ax, x^m; 2° la fonction exponentielle a^x et la fonction logarithmique $\log x$; 3° les fonctions circulaires. Nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit précédemment à l'égard des fonctions algébriques, et nous allons considérer les diverses fonctions transcendantes élémentaires dont nous venons de parler.

Différentiation des logarithmes et des exponentielles.

36. Lorsque deux variables dépendent l'une de l'autre, et qu'on exprime successivement chacune d'elles en fonction de l'autre, on obtient deux fonctions qui sont dites *inverses l'une de l'autre.* Telles sont les deux fonctions que nous allons considérer. En général, quand on sait trouver la dérivée ou la différentielle d'une fonction, on peut en conclure la dérivée ou la différentielle de la fonction inverse. En effet, supposons que deux variables, x et y, soient liées entre elles par une équation susceptible d'être mise sous les deux formes

$$y = f(x), \quad x = F(y),$$

en prenant les dérivées par rapport à x des deux membres de la seconde équation, on aura (n° 21)

$$1 = F'(y) f'(x).$$

37. DÉTERMINATION DE LA LIMITE DE $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ QUAND m TEND VERS L'INFINI. — La connaissance de cette limite est indispensable pour l'objet que nous nous proposons; nous devons commencer par la déterminer.

Nous supposerons d'abord que le nombre m tende vers l'infini positif en ne prenant que des valeurs entières.

Alors on a, par la formule du binôme relative à un exposant entier et positif,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{m}{1}\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{1}{m^3}+\ldots.$$

Soit n un entier quelconque inférieur à m, et désignons par R_n la somme des termes qui suivent le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme dans le second membre de la formule précédente, on pourra écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m &= 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\ldots \\ &+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots n}+R_n, \end{aligned}\right.$$

et la valeur de R_n sera

$$R_n = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2\ldots n} \times\left[\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)}{(n+1)}+\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n+1}{m}\right)}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right].$$

Dans la somme entre crochets qui forme le dernier facteur de cette expression, le nombre des termes est $m-n$, et ces termes sont moindres que ceux qui occupent respectivement les mêmes rangs dans la progression géométrique illimitée

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots.$$

La somme de cette progression est $\frac{1}{n}$; donc le facteur entre crochets, dans l'expression de R_n, peut être représenté par $\frac{\theta}{n}$, θ désignant une quantité comprise entre zéro et 1. Ainsi l'on aura

$$(2)\qquad R_n = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots n}\frac{\theta}{n}.$$

Le nombre n étant regardé comme invariable, faisons tendre m vers l'infini, et désignons par $\mathfrak{R}_n$ la limite de R_n, par ϑ la limite de θ, la formule (1) donnera

$$(3)\qquad \lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \mathfrak{R}_n,$$

et l'on a évidemment, par la formule (2),

$$(4)\qquad \mathfrak{R}_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{\vartheta}{n},$$

ϑ étant une quantité comprise entre zéro et 1.

Le nombre n peut être choisi arbitrairement, et si l'on suppose qu'il croisse indéfiniment, la quantité $\mathfrak{R}_n$ tendra vers zéro. Il s'ensuit que le second membre de la formule (3) est égal à la *somme* de la série convergente

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots,$$

somme que nous représenterons, suivant l'usage, par la lettre e; ainsi l'on a

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e,$$

en posant

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots.$$

Si l'on arrête la série au terme qui en a n avant lui, l'erreur commise sera la quantité $\mathfrak{R}_n$, qui est ce qu'on nomme le *reste de la série;* on voit que ce reste est inférieur à la $n^{\text{ième}}$ partie du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme auquel on s'arrête. Cette remarque permet de calculer le nombre e avec une approximation aussi grande que l'on veut; on trouve

$$e = 2,71828\ 18284\ 59045\ldots.$$

38. Supposons maintenant que m tende vers l'infini positif en passant par tous les états de grandeur, et désignons par μ le nombre entier immédiatement inférieur à la variable m. On aura

$$\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} < \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1},$$

ou

$$\frac{\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1}}{\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} < \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right).$$

Or, quand m tend vers l'infini, le nombre entier μ tend aussi vers l'infini; on a donc

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu} = \lim\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1} = e,$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right) = \lim\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right) = 1;$$

donc la quantité $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ est comprise entre deux variables qui ont l'une et l'autre pour limite le nombre e; on a en conséquence

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e.$$

Supposons enfin que m tende vers l'infini négatif. Si l'on fait $m = -\mu$, on aura

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^\mu = \left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^\mu$$

ou

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1}\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right).$$

Quand m tend vers $-\infty$, $\mu - 1$ tend vers $+\infty$, et l'on a

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1} = e, \quad \lim\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right) = 1;$$

donc on a encore dans ce cas

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

39. Différentielle de la fonction $\log x$. — La base des logarithmes est ici un nombre positif quelconque a. Si l'on donne à x l'accroissement Δx, la fonction $\log x$ prendra l'accroissement

$$\Delta \log x = \log(x+\Delta x) - \log x = \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

et l'on aura

$$\frac{\Delta \log x}{\Delta x} = \frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Posons

$$m = \frac{x}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \Delta x = \frac{x}{m},$$

il viendra

$$\frac{\Delta \log x}{\Delta x} = \frac{m}{x}\log\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

ou

$$\frac{\Delta \log x}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Or, quand Δx tend vers zéro, le nombre m tend vers l'infini et l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ a pour limite le nombre e; on a donc

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{\log e}{x}$$

ou

$$d\log x = \log e \frac{dx}{x}.$$

Si les logarithmes sont pris dans le système de Néper, la base est précisément égale au nombre e; on a donc

$$\log e = 1 \quad \text{et} \quad d\log x = \frac{dx}{x}.$$

Il faut remarquer que, d'après le principe du n° **21**, l'expression précédente de $d\log x$ subsiste lors même que x ne serait pas la variable indépendante. On voit aussi que la *différentielle logarithmique* d'une fonction supposée positive n'est autre chose que la différentielle du logarithme népérien de cette fonction.

40. Différentielle de la fonction a^x, a étant une constante positive. — Si l'on donne à x l'accroissement Δx, il vient

$$\Delta a^x = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1),$$

d'où

$$\frac{\Delta a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Posons

$$a^{\Delta x} - 1 = \frac{1}{m} \quad \text{ou} \quad a^{\Delta x} = 1 + \frac{1}{m};$$

on aura, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$\Delta x \log a = \log\left(1+\frac{1}{m}\right) \quad \text{ou} \quad \Delta x = \frac{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\log a},$$

et, par suite,

$$\frac{\Delta a^x}{\Delta x} = a^x \frac{\log a}{m \log\left(1+\frac{1}{m}\right)} = a^x \frac{\log a}{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}.$$

Maintenant faisons tendre Δx vers zéro ; le nombre m tendra vers l'infini, et $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tendra vers e ; on aura donc, à la limite,

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \frac{\log a}{\log e}.$$

La base des logarithmes qui figurent dans cette formule est arbitraire ; si l'on choisit la base de Néper, on aura $\log e = 1$, et, par suite,

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \log a \quad \text{et} \quad da^x = a^x \log a \, dx.$$

Dans le cas de $a = e$, ces formules deviennent

$$\frac{de^x}{dx} = e^x, \quad de^x = e^x \, dx;$$

ainsi la fonction e^x jouit de la propriété d'être égale à sa dérivée.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que les résultats qui précèdent subsistent quand x cesse d'être variable indépendante.

41. Nous avons procédé directement à la recherche des différentielles des fonctions $\log x$ et a^x ; mais, ainsi que nous l'avons déjà dit, la différentielle de l'une de ces fonctions étant connue, on en déduit immédiatement la différentielle de l'autre. Posons en effet

$$y = a^x;$$

on aura, en prenant les logarithmes des deux membres

dans le système dont la base est a,

$$\log y = x.$$

Maintenant, si l'on admet que la différentielle de $\log y$ soit $\log e \frac{dy}{y}$, on aura

$$\log e \frac{dy}{y} = dx$$

ou

$$da^x = \frac{a^x\,dx}{\log e}.$$

Comme $\log a = 1$, on peut écrire aussi

$$da^x = \frac{\log a}{\log e} a^x\,dx,$$

et alors on peut choisir à volonté la base du système dans lequel sont pris les logarithmes. Si l'on adopte le nombre e pour base, on aura

$$da^x = a^x \log a\,dx,$$

comme nous l'avons trouvé directement.

42. Applications. — 1° Soit

$$y = \log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

la caractéristique log désignant un logarithme népérien. On peut écrire

$$y = \frac{1}{2}\log(1-x) - \frac{1}{2}\log(1+x),$$

d'où

$$dy = \frac{1}{2}\frac{d(1-x)}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{d(1-x)}{1-x} = -\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{2}$$

ou

$$dy = \frac{dx}{x^2-1}.$$

2° Soit

$$y = \log\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right),$$

a étant une constante, et la caractéristique log désignant un logarithme népérien.

On a

$$dy = \frac{d\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)}{x + \sqrt{x^2 + a}} = \frac{\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a}}\right)dx}{x + \sqrt{x^2 + a}},$$

ou

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

3° Soit

$$y = u^v,$$

u et v étant des fonctions données de x.

On a

$$\log y = v \log u,$$

d'où

$$d \log y = v\, d \log u + \log u\, dv,$$

ou

$$\frac{dy}{y} = v \frac{du}{u} + \log u\, dv,$$

ou enfin

$$dy = v u^{v-1} du + u^v \log u\, dv.$$

On serait arrivé au même résultat, en appliquant la règle de la différentiation des fonctions composées, combinée avec celle qui donne la différentielle de la fonction a^x.

Si l'on suppose $u = x$, $v = \frac{1}{x}$, la formule précédente donnera

$$d\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = x^{\frac{1}{x} - 2}(1 - \log x)\, dx.$$

On voit que la fonction $x^{\frac{1}{x}}$ croît tant que x est inférieure à e, car sa dérivée est alors positive, et qu'elle décroît

tant que x est supérieure à e. Par conséquent cette fonction atteint son maximum pour $x = e$.

4° *Quels sont les systèmes de logarithmes dans lesquels il existe des nombres égaux à leurs logarithmes?*

Il s'agit de savoir dans quel cas la fonction

$$y = a^x - x$$

peut s'annuler. La caractéristique log désignant un logarithme népérien, on a

$$\frac{dy}{dx} = a^x \log a - 1.$$

Si a est plus petit que l'unité, la fonction y est décroissante quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$; d'ailleurs, elle a des valeurs de signes contraires pour $x = 0$ et pour $x = +\infty$, elle s'annule donc une fois. Si a est plus grand que l'unité, la fonction y sera décroissante tant que x sera inférieur au nombre x_1 défini par la formule

$$x_1 = -\frac{\log.\log a}{\log a},$$

puis elle ira en croissant. Cette fonction a donc un minimum

$$\frac{1}{\log a} + \frac{\log.\log a}{\log a}$$

correspondant au nombre x_1 : lorsque ce minimum est négatif, la fonction s'annule deux fois; dans le cas contraire, elle ne s'annule pas. Pour que y puisse devenir nulle, il faut donc que l'on ait

$$\log.\log a < -1, \quad \text{ou} \quad a < e^{\frac{1}{e}};$$

si $a = e^{\frac{1}{e}}$, on a $x_1 = e$.

Différentiation des fonctions circulaires.

43. Différentielles des fonctions circulaires directes. — Ces fonctions sont

$$\sin x, \quad \operatorname{tang} x, \quad \operatorname{séc} x,$$
$$\cos x, \quad \cot x, \quad \operatorname{coséc} x.$$

1° Considérons d'abord les fonctions $\sin x$ et $\cos x$. Si l'on donne à x l'accroissement Δx, on aura

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \quad 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$
$$\Delta \cos x = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

d'où

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta \cos x}{\Delta x} = - \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Le rapport $\dfrac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ tend vers l'unité quand Δx tend vers zéro; on aura donc, en passant aux limites,

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x,$$

ou

$$d \sin x = \cos x\, dx, \quad d \cos x = -\sin x\, dx.$$

2° Considérons en deuxième lieu les fonctions $\operatorname{tang} x$

et $\cot x$. On a

$$\begin{aligned}\Delta \operatorname{tang} x &= \operatorname{tang}(x + \Delta x) - \operatorname{tang} x \\ &= [1 + \operatorname{tang} x \operatorname{tang}(x + \Delta x)] \operatorname{tang} \Delta x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \cot x &= \cot(x + \Delta x) - \cot x \\ &= -[1 + \cot x \cot(x + \Delta x)] \operatorname{tang} \Delta x,\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\Delta \operatorname{tang} x}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tang} \Delta x}{\Delta x} [1 + \operatorname{tang} x \operatorname{tang}(x + \Delta x)],$$

$$\frac{\Delta \cot x}{\Delta x} = -\frac{\operatorname{tang} \Delta x}{\Delta x} [1 + \cot x \cot(x + \Delta x)].$$

Passant aux limites, $\dfrac{\operatorname{tang} \Delta x}{\Delta x}$ se réduit à l'unité, et l'on a

$$\frac{d \operatorname{tang} x}{dx} = 1 + \operatorname{tang}^2 x = \operatorname{séc}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\frac{d \cot x}{dx} = -(1 + \cot^2 x) = -\operatorname{coséc}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

d'où

$$d \operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad d \cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Les fonctions $\operatorname{tang} x$ et $\cot x$ ayant respectivement pour valeurs

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

on aurait pu conclure leurs différentielles de celles des fonctions $\sin x$ et $\cos x$ en faisant usage de la règle relative à la différentiation des quotients. Ainsi, par exemple, on a

$$d \operatorname{tang} x = \frac{\cos x \, d \sin x - \sin x \, d \cos x}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

3° Considérons enfin les fonctions $\operatorname{séc} x$ et $\operatorname{coséc} x$. On a

$$\operatorname{séc} x = (\cos x)^{-1}, \quad \operatorname{coséc} x = (\sin x)^{-1};$$

donc, en appliquant la règle de la différentiation des puissances, on a

$$d\,\text{séc}\,x = (\cos x)^{-2} \sin x\, dx = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = + \tang x \,\text{séc}\, x\, dx,$$

$$d\,\text{coséc}\,x = -(\sin x)^{-2} \cos x\, dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\cot x\,\text{coséc}\, x\, dx.$$

Ainsi, en résumé, on a

$$d \sin x = \cos x\, dx, \qquad d \cos x = -\sin x\, dx,$$

$$d \tang x = \frac{1}{\cos^2 x} dx, \qquad d \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} dx,$$

$$d\,\text{séc}\, x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx, \qquad d\,\text{coséc}\, x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx.$$

Ces six formules subsistent lorsque x cesse d'être la variable indépendante, et l'on doit remarquer que les trois dernières peuvent être obtenues en appliquant les trois premières à la variable $\frac{\pi}{2} - x$, π désignant la demi-circonférence. On a effectivement

$$d \cos x = d \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = -\sin x\, dx,$$

$$d \cot x = d \tang\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx = -\frac{1}{\sin^2 x} dx,$$

$$d\,\text{coséc}\, x = d\,\text{séc}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx.$$

44. Applications. — En combinant les règles précédentes avec celle de la différentiation des logarithmes, on a immédiatement les différentielles des fonctions

$$\log \sin x, \quad \log \cos x, \quad \log \tang x,$$

Effectivement, les logarithmes étant pris dans le système népérien, on a

$$d \log \sin x = \frac{d \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \cot x\, dx,$$

$$d \log \cos x = \frac{d \cos x}{\cos x} = -\frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\operatorname{tang} x\, dx,$$

$$d \log \operatorname{tang} x = \frac{d \operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x} = \frac{dx}{\operatorname{tang} x \cos^2 x} = \frac{2\, dx}{\sin 2x}.$$

Si dans la dernière formule on remplace x et dx par $\frac{x}{2}$ et $\frac{dx}{2}$, puis par $\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$ et $\frac{dx}{2}$, on aura

$$d \log \operatorname{tang} \frac{x}{2} = \frac{dx}{\sin x},$$

$$d \log \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{dx}{\cos x}.$$

45. Différentielles des fonctions circulaires inverses. — La variable indépendante étant toujours représentée par x, les fonctions circulaires inverses sont

$$\text{arc} \sin x, \quad \text{arc} \operatorname{tang} x, \quad \text{arc} \operatorname{séc} x,$$
$$\text{arc} \cos x, \quad \text{arc} \cot x, \quad \text{arc} \operatorname{coséc} x.$$

Mais, comme à une ligne trigonométrique donnée x répondent une infinité d'arcs, les expressions précédentes ne sont pas complétement déterminées, et, pour qu'elles puissent être admises comme fonctions de x, il est nécessaire d'ajouter quelque chose à leur définition. Or, quand un arc de cercle varie d'une manière continue entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, chacune de ses lignes trigonométriques varie elle-même d'une manière continue; par conséquent, on achèvera de déterminer les fonctions circulaires inverses, si on les assujettit à rester

continues, et qu'on fixe les valeurs de ces fonctions qui répondent à une valeur donnée de la variable. Par exemple, les fonctions arc sin x, arc tang x seront entièrement définies, si l'on impose la condition qu'elles s'annulent pour $x = 0$ et qu'elles varient d'une manière continue avec x.

La différentiation des fonctions circulaires inverses se ramène immédiatement (n° 36) à celle des fonctions directes.

1° Soit

$$y = \text{arc}\sin x, \quad \text{d'où} \quad \sin y = x,$$

on aura

$$\cos y\, dy = dx, \quad dy = \frac{dx}{\cos y} = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

le signe qu'il faut donner au radical étant celui de $\cos y$.

2° Soit

$$y = \text{arc}\cos x, \quad \text{d'où} \quad \cos y = x,$$

on aura

$$-\sin y\, dy = dx, \quad dy = \frac{-dx}{\sin y} = \frac{-dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

le signe du radical étant celui de $\sin y$.

3° Soit

$$y = \text{arc tang}\, x, \quad \text{d'où} \quad \text{tang}\, y = x,$$

on aura

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = dx, \quad dy = \cos^2 y\, dx = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

4° Soit

$$y = \text{arc}\cot x, \quad \text{d'où} \quad \cot y = x,$$

on aura

$$-\frac{dy}{\sin^2 y} = dx, \quad dy = -\sin^2 y\, dx = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

5° Soit

$$y\ \text{arc séc}\, x \quad \text{d'où} \quad \text{séc}\, y = x,$$

on aura

$$\tang y \,\text{séc}\, y\, dy = dx, \quad dy = \frac{dx}{\tang y \,\text{séc}\, y} = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

le radical devant être pris avec le signe de $\tang y$.

6° Soit

$$y = \text{arc coséc}\, x, \quad \text{d'où} \quad \text{coséc}\, y = x,$$

on aura

$$-\cot y \,\text{coséc}\, y\, dy = dx,$$

$$dy = -\frac{dx}{\cot y\, \text{coséc}\, y} = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

le radical ayant le signe de $\cot y$.

Ainsi l'on a, en résumé,

$$d\,\text{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad d\,\text{arc}\cos x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d\,\text{arc}\tang x = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad d\,\text{arc}\cot x = -\frac{dx}{1+x^2},$$

$$d\,\text{arc séc}\, x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \qquad d\,\text{arc coséc}\, x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

les signes des radicaux étant déterminés comme nous l'avons indiqué. Il convient de remarquer que les différentielles des fonctions circulaires inverses sont algébriques, comme la différentielle de la fonction $\log x$.

La somme des fonctions $\text{arc}\tang x$, $\text{arc}\cot x$ est évidemment égale à une constante, aussi leurs différentielles sont-elles égales et de signes contraires. Les deux fonctions $\text{arc}\sin x$ et $\text{arc}\cos x$ ou $\text{arc séc}\, x$ et $\text{arc coséc}\, x$ ont une somme constante ou une différence constante; il s'ensuit que les différentielles de ces fonctions doivent être égales ou égales et de signes contraires.

Différentiation des fonctions implicites.

46. Considérons d'abord le cas d'une fonction y liée à sa variable x par une équation

$$f(x, y) = 0,$$

dont le premier membre est une fonction donnée de x et de y.

La variable y est une fonction de x, et par suite on peut regarder $f(x, y)$ comme une fonction composée. Cette fonction est constamment nulle par hypothèse; donc sa différentielle

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

est elle-même égale à zéro. Ainsi l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

d'où

$$dy = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} dx \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

On voit que *la dérivée d'une fonction y, liée à la variable x par l'équation $f(x, y) = 0$, s'obtient en divisant la dérivée relative à x du premier membre de l'équation par la dérivée relative à y du même premier membre, et en changeant le signe du quotient.*

47. Exemples. — 1° Soit

$$f(x, y) = a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0.$$

On a ici

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2b^2 x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2a^2 y,$$

et, par suite,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Dans le cas dont il s'agit, l'équation proposée peut être résolue par rapport à y, et l'on trouve

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

le radical devant être pris successivement avec le signe + et avec le signe —. En substituant cette valeur de y dans la formule précédente, celle-ci devient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}};$$

on obtient immédiatement ce résultat en différentiant la précédente valeur de y.

2° Soit en second lieu l'équation

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

qui représente la courbe nommée *lemniscate de Bernoulli*, quand on regarde x et y comme des coordonnées rectangulaires. On a ici

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2) - 4a^2 x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2) + 4a^2 y,$$

et, par conséquent,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(x^2 + y^2 - a^2)}{y(x^2 + y^2 + a^2)}.$$

48. Considérons le cas où l'on a deux équations

$$f(x,y,z) = 0, \quad F(x,y,z) = 0,$$

entre la variable indépendante x et deux fonctions y, z de cette variable. Puisque y et z sont des fonctions de x,

$f(x, y, z)$ et $F(x, y, z)$ sont des fonctions composées; d'ailleurs les différentielles de ces fonctions sont nulles, puisque les fonctions elles-mêmes le sont : on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0,$$

d'où l'on tire les valeurs de dy et de dz, savoir :

$$dy = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}}dx,$$

$$dz = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}}dx.$$

49. Exemple. — Soient les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \alpha x + 6y + \gamma z = p,$$

où $r, \alpha, 6, \gamma, p$ désignent des constantes données; on aura

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0, \quad \alpha\,dx + 6\,dy + \gamma\,dz = 0,$$

d'où

$$\frac{dx}{\gamma y - 6z} = \frac{dy}{\alpha z - \gamma x} = \frac{dz}{6x - \alpha y},$$

formule qui fait connaître les différentielles dy et dz des deux fonctions y et z.

50. On procédera de la même manière dans le cas général où l'on a n équations

$$f(x, y, z, u, \ldots) = 0,$$
$$F(x, y, z, u, \ldots) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, u, \ldots) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

entre une variable indépendante x et n fonctions y, z, u, ... de cette variable. Les fonctions f, F, φ, ... étant, comme dans les cas précédents, des fonctions composées dont les valeurs sont identiquement nulles, les différentielles de ces fonctions sont nulles aussi, et l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial u}du + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial u}du + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \ldots = 0,$$

....

Ces n équations déterminent les différentielles des n fonctions y, z, u, ... On les obtient en *différentiant* les équations proposées, c'est-à-dire en égalant à zéro les différentielles des premiers membres de celles-ci.

De l'élimination des constantes arbitraires.

51. Considérons une équation

$$f(x, y, C) = 0 \tag{1}$$

entre les variables x, y et la constante arbitraire C. La différentiation de cette équation donne, comme on l'a vu,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \tag{2}$$

et si l'on élimine la constante C entre les équations (1) et (2), il en résultera une équation

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{3}$$

entre la variable indépendante x, la fonction y et sa dérivée $\frac{dy}{dx}$.

Cette équation (3), qui résulte par la différentiation d'une équation où figure une constante arbitraire, est dite une *équation différentielle*. Relativement à cette équation différentielle, l'équation (1) est quelquefois désignée sous le nom d' *équation primitive*.

Si l'on suppose que x et y désignent des coordonnées rectilignes et que la constante C prenne une infinité de valeurs, l'équation (1) représentera une famille de courbes; l'équation (3) exprime une propriété de la tangente, commune à toutes les courbes de cette famille.

52. Exemples. — 1° Soit l'équation

$$y^2 = 2px + C,$$

qui donne par la différentiation

$$y\frac{dy}{dx} = p.$$

Ici la constante C a disparu d'elle-même et l'équation précédente est l'équation différentielle qui résulte de la proposée. Elle exprime (n° 29) que la sous-normale est constante dans toutes les courbes que représente l'équation

$$y^2 = 2px + C.$$

2° Soit, en second lieu, l'équation

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} = 1,$$

dans laquelle b est une constante donnée et ρ un paramètre variable; cette équation représente un système de coniques *homofocales*, lorsque x et y désignent des coordonnées rectangulaires. La différentiation donne

$$\frac{x\,dx}{\rho^2} + \frac{y\,dy}{\rho^2 - b^2} = 0,$$

d'où

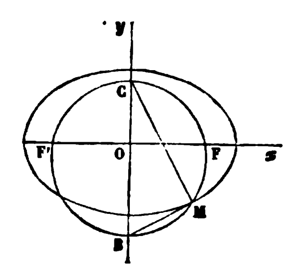
$$\frac{x\,dx}{\rho^2} = \frac{y\,dy}{b^2 - \rho^2} = \frac{x\,dx + y\,dy}{b^2}.$$

L'élimination de ρ^2 donne

$$\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\left(x\frac{dx}{dy} + y\right) = b^2,$$

ce qui est l'équation différentielle demandée.

Menons la tangente MB et la normale MC à l'une des



courbes de la famille considérée, et soient B, C les points où ces droites rencontrent l'axe Oy. Les équations de MB et de MC sont

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x);$$

par conséquent, on a

$$OB = x\frac{dy}{dx} - x, \quad OC = x\frac{dx}{dy} + y,$$

d'où

$$OB \times OC = b^2.$$

Il s'ensuit que, si l'on circonscrit au triangle BMC un cercle qui coupe en F et F' l'axe des abscisses, on aura

$$OF = OF' = b,$$

ce qui exprime que F et F' sont les foyers de notre

courbe. Telle est la propriété exprimée par l'équation différentielle que nous avons obtenue.

53. Considérons généralement un système de n équations

$$(1)\quad \begin{cases} f(x, y, z, u, \ldots, a, b, c, \ldots) = 0, \\ f_1(x, y, z, u, \ldots, a, b, c, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{n-1}(x, y, z, u, \ldots, a, b, c, \ldots) = 0, \end{cases}$$

entre une variable indépendante x, n fonctions y, z, u, ... de cette variable et n arbitraires a, b, c, ... La différentiation des équations (1) donnera, comme on l'a vu, les n équations suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \ldots = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{du}{dx} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \ldots \qquad = 0. \end{cases}$$

Çela étant, si l'on élimine les n arbitraires a, b, c, ... entre les $2n$ équations qui composent les systèmes (1) et (2), on obtiendra n équations

$$(3)\quad \begin{cases} F\left(x, y, z, u, \ldots, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}, \ldots\right) = 0, \\ F_1\left(x, y, z, u, \ldots, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}, \ldots\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{n-1}\left(x, y, z, u, \ldots, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}, \ldots\right) = 0, \end{cases}$$

qui constituent ce que l'on nomme un *système d'équations différentielles simultanées.*

CHAPITRE III.

DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE, DÉRIVÉES PARTIELLES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

Des dérivées des divers ordres.

54. Soient $f(x)$ une fonction de la variable x et $f'(x)$ sa dérivée. Nous désignerons par $f''(x)$ la dérivée de $f'(x)$, par $f'''(x)$ la dérivée de $f''(x)$, et ainsi de suite; nous formerons de cette manière une suite de fonctions

$$f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),\quad \ldots,\quad f^{(n)}(x),\quad \ldots,$$

dont le nombre sera illimité, à moins que $f(x)$ ne soit une fonction rationnelle et entière.

La fonction $f^n(x)$, qui occupe le $n^{\text{ième}}$ rang dans la suite précédente, est dite la *dérivée du $n^{\text{ième}}$ ordre de $f(x)$*, ou, plus simplement, la *$n^{\text{ième}}$ dérivée de $f(x)$*.

Des différentielles des divers ordres.

55. Soit

$$y = f(x) \tag{1}$$

une fonction donnée de la variable indépendante x. Représentons par d^{h_1} la différentielle de cette fonction pour un accroissement arbitraire h_1 attribué à la variable x; on a (n° 18)

$$d^{h_1}y = f'(x)h_1. \tag{2}$$

Cette différentielle est elle-même une fonction de x; sa différentielle, prise en attribuant à la variable x un accroissement arbitraire h_2, est la différentielle du second ordre de la fonction y, que nous représenterons par le symbole $d^{h_2}d^{h_1}y$. On a

$$d^{h_2}d^{h_1}y = d^{h_2}f'(x)h_1 = h_1 d^{h_2}f'(x) = f''(x)h_1 h_2.$$

De même, la différentielle de cette différentielle du second ordre, relative à un accroissement arbitraire h_3 attribué à la variable x, sera donnée par la formule

$$d^{h_3}d^{h_2}d^{h_1}y = f'''(x)h_1 h_2 h_3.$$

En continuant ainsi, on obtient une suite

$$d^{h_1}y,\ d^{h_2}d^{h_1}y,\ d^{h_3}d^{h_2}d^{h_1}y,\ \ldots,$$

dans laquelle chaque terme est la différentielle du précédent, relative à un certain accroissement attribué à la variable x. Le terme qui occupe le rang n est la différentielle d'ordre n de la fonction y, et l'on a

$$(3)\qquad d^{h_n}\ldots d^{h_2}d^{h_1}y = f^n(x)h_1 h_2 \ldots h_n.$$

Il résulte de cette formule que la différentielle d'ordre n ne change pas quand on change l'ordre des caractéristiques d.

Ordinairement on suppose toutes les quantités h_1, h_2, ..., h_n, ... égales entre elles. Soit h leur valeur commune : alors les différentielles des divers ordres se représentent par les symboles

$$dy,\ d^2y,\ \ldots,\ d^ny,\ \ldots,$$

et l'on a

$$(4)\qquad d^ny = f^n(x)h^n = f^n(x)dx^n;$$

d'où

$$(5)\qquad \frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x),$$

ce qui exprime que *la dérivée d'ordre n d'une fonction est égale à la différentielle d'ordre n de cette fonction divisée par la $n^{ième}$ puissance de la différentielle de la variable indépendante.*

Cette notation est celle que l'on emploie le plus souvent pour représenter les dérivées, et la formule (3) s'écrit alors comme il suit :

$$d^n y = \frac{d^n y}{dx^n} dx^n.$$

Il est évident qu'on obtiendra les différentielles des divers ordres des fonctions par le moyen des règles que nous avons établies dans le Chapitre précédent.

56. Différentielles des divers ordres de quelques fonctions simples. — 1° Soit

$$y = x^m.$$

On aura

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}, \quad \ldots,$$

$$\frac{d^n y}{dx^m} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

2° Soit

$$y = \log x,$$

la caractéristique log désignant un logarithme népérien. On aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -x^{-2}, \quad \ldots,$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n 1.2.3\ldots(n-1)x^{-n},$$

3° Soit

$$y = a^x,$$

a étant une constante. On aura

$$\frac{dy}{dx} = a^x \log a, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = a^x \log^2 a, \quad \ldots, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = a^x \log^n a,$$

les logarithmes étant népériens. Dans le cas de $a = e$, on a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^x = y.$$

4° Soit

$$y = \sin(x + \alpha),$$

α étant une constante. On a

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x + \alpha) = \sin\left(x + \alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

en sorte que la dérivée de $\sin(x + \alpha)$ s'obtient en ajoutant le quadrant $\frac{\pi}{2}$ à la constante α. On conclut de là que l'on a, quel que soit n,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin\left(x + \alpha + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Si l'on suppose successivement $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on aura

$$\frac{d^n \sin x}{dx^n} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{d^n \cos x}{dx^n} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Des différences des divers ordres.

57. Soit $y = f(x)$ une fonction donnée de la variable x; l'accroissement

$$f(x + h_1) - f(x)$$

est dit la *différence du premier ordre* ou la *différence première* de la fonction y, relative à l'accroissement arbitraire h_1 attribué à la variable x: nous représenterons

cette différence par $\Delta^{h_1}y$. Cette différence est elle-même une fonction de x et sa différence, prise en attribuant à la variable x un accroissement arbitraire h_2, est la *différence du second ordre* ou la *différence seconde* de la fonction y : nous la représenterons par $\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}y$, et ainsi de suite; en sorte que, si l'on considère la série

$$\Delta^{h_1}y,\quad \Delta^{h_2}\Delta^{h_1}y,\quad \Delta^{h_3}\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}y,\quad \ldots,$$

dont chaque terme est la différence du précédent, relative à un certain accroissement attribué à la variable x, le terme de rang n sera la *différence d'ordre n* ou la $n^{ième}$ *différence* de y.

De l'expression de la différence première

$$\Delta^{h_1}y = f(x+h_1) - f(x),$$

on déduit

$$\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}y = f(x+h_2+h_1) - f(x+h_2) - f(x+h_1) + f(x);$$

on en conclut que cette différence ne change pas quand on intervertit l'ordre des deux caractéristiques Δ. Si l'on considère maintenant la différence d'ordre n, on pourra évidemment, sans altérer sa valeur, intervertir l'ordre de deux caractéristiques consécutives, et par conséquent disposer ces caractéristiques dans tel ordre que l'on voudra.

58. Il existe entre une différence et la différentielle de même ordre une relation importante que nous allons établir.

L'expression de la différence première est donnée par la formule (5) du n° **14**

$$(1)\qquad \Delta^{h_1}y = f(x+h_1) - f(x) = f'(x+\theta_1 h_1)h_1,$$

dans laquelle θ_1 désigne un nombre positif inférieur à

l'unité. Considérons la différence seconde, on a

$$\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}f(x)=\Delta^{h_2}[f(x+h_1)-f(x)]=\Delta^{h_2}\Pi(x),$$

en posant $\Pi(x)=f(x+h_1)-f(x)$. Mais, d'après la formule (1),

$$\Delta^{h_2}\Pi(x)=\Pi'(x+\theta_2 h_2)h_2.$$

On a d'ailleurs, d'après la définition de la fonction $\Pi(x)$,

$$\Pi'(x)=f'(x+h_1)-f'(x);$$

il en résulte

$$\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}f(x)=[f'(x+\theta_2 h_2+h_1)-f'(x+\theta_2 h_2)]h_2,$$

et, en réduisant la quantité entre parenthèses au moyen de la formule (1),

$$(2)\qquad \Delta^{h_2}\Delta^{h_1}f(x)=f''(x+\theta_2 h_2+\theta_1 h_1)h_1 h_2,$$

θ_1 et θ_2 étant des nombres positifs inférieurs à l'unité.

Considérons encore la différence troisième, on a

$$\Delta^{h_3}\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}f(x)=\Delta^{h_3}\Delta^{h_2}[f(x+h_1)-f(x)]=\Delta^{h_3}\Delta^{h_2}\Pi(x),$$

et, en vertu de la formule (2),

$$\Delta^{h_3}\Delta^{h_2}\Pi(x)=\Pi''(x+\theta_3 h_3+\theta_2 h_2)h_2 h_3.$$

Mais, de la définition de la fonction $\Pi(x)$, on déduit

$$\begin{aligned}\Pi''&(x+\theta_3 h_3+\theta_2 h_2)\\ &=f''(x+\theta_3 h_3+\theta_2 h_2+h_1)-f''(x+\theta_3 h_3+\theta_2 h_2)\\ &=f'''(x+\theta_3 h_3+\theta_2 h_2+\theta_1 h_1)h_1;\end{aligned}$$

il en résulte

$$(3)\quad \Delta^{h_3}\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}f(x)=f'''(x+\theta_3 h_3+\theta_2 h_2+\theta_1 h_1)h_1 h_2 h_3,$$

θ_1, θ_2, θ_3 étant des nombres positifs inférieurs à l'unité.

En continuant ainsi, il est évident que l'on obtiendra, pour exprimer la différence d'ordre n, la formule

suivante, due à M. Ossian Bonnet:

$$(4)\quad \begin{cases} \Delta^{h_n}\Delta^{h_{n-1}}\ldots\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}f(x) \\ \qquad = f^n(x+\theta_1 h_1+\theta_2 h_2+\ldots+\theta_n h_n)h_1 h_2\ldots h_n, \end{cases}$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ étant des nombres positifs inférieurs à l'unité.

Si l'on divise cette différence par la différentielle correspondante (n° 55), on voit que le quotient

$$\frac{\Delta^{h_n}\ldots\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}y}{d^{h_n}\ldots d^{h_2}d^{h_1}y} = \frac{f^n(x+\theta_1 h_1+\theta_2 h_2+\ldots+\theta_n h_n)}{f^n(x)}$$

a une limite égale à l'unité, lorsque l'on fait tendre vers zéro toutes les quantités $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

Dérivées partielles, différentielles partielles et différences partielles des divers ordres d'une fonction de plusieurs variables indépendantes.

59. Considérons une fonction ω de plusieurs variables indépendantes $x, y, z, \ldots$, et soit

$$(1)\qquad \omega = f(x, y, z, \ldots),$$

la fonction donnée. On peut prendre la dérivée de ω par rapport à l'une quelconque des variables, les autres étant considérées comme des constantes; les résultats de ces dérivations se nomment *dérivées partielles du premier ordre* de la fonction proposée : on les représente par les symboles

$$f'_x(x, y, z, \ldots),\ f'_y(x, y, z, \ldots),\ f'_z(x, y, z, \ldots),\ \ldots.$$

Les dérivées partielles des *dérivées partielles du premier ordre* sont les *dérivées partielles du second*

ordre : on les représente par les symboles

$$f''_{xx}(x,y,z,\ldots),\ f''_{xy}(x,y,z,\ldots),\ f''_{xz}(x,y,z,\ldots),\ f''_{yx}(x,y,z,\ldots),\ \ldots.$$

Les dérivées partielles des *dérivées partielles du second ordre* sont les *dérivées partielles du troisième ordre,* et ainsi de suite. En général, une dérivée partielle d'ordre n s'indique par la caractéristique f affectée de deux indices; l'indice supérieur est le nombre n qui indique l'ordre de la dérivée partielle, l'indice inférieur est formé par la succession de n lettres $x, y, z, \ldots$ disposées dans l'ordre où l'on a effectué les dérivations.

60. Théorème. — *La valeur d'une dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables est indépendante de l'ordre dans lequel on effectue les dérivations, le nombre des dérivations relatives à chaque variable demeurant le même.*

Considérons d'abord le cas le plus simple, celui d'une fonction de deux variables. Représentons par les caractéristiques Δ_x^h et Δ_y^k les différences d'une fonction quelconque des deux variables x et y, lorsqu'on attribue à ces variables l'un des accroissements h ou k. On a

$$\Delta_x^h f(x,y) = f(x+h,y) - f(x,y),$$

puis

$$\Delta_y^k \Delta_x^h f(x,y)$$
$$= f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x,y).$$

Le second membre ne change pas lorsqu'on prend les différences dans l'ordre inverse, c'est-à-dire lorsqu'on change l'ordre des caractéristiques : on en conclut que

$$(2)\qquad \Delta_y^k \Delta_x^h f(x,y) = \Delta_x^h \Delta_y^k f(x,y).$$

Exprimons ces deux différences d'après la méthode de M. Ossian Bonnet (n° 58).

On a

$$\Delta_y^k \Delta_x^h f(x, y) = \Delta_y^k[f(x+h, y) - f(x, y)] = \Delta_y^k \Pi(x, y),$$

en posant $\Pi(x, y) = f(x+h, y) - f(x, y)$.

L'application de la formule (5) du n° **14** à la fonction $\Pi(x, y)$, dans laquelle on fait varier y, donne

$$\Delta_y^k \Pi(x, y) = \Pi'(x, y + \theta k)\, k.$$

D'après la définition de la fonction $\Pi(x, y)$, on a

$$\Pi'_y(x, y + \theta k) = f'_y(x+h, y+\theta k) - f'_y(x, y+\theta k),$$

d'où

$$\Delta_y^k \Delta_x^h f(x, y) = [f'_y(x+h, y+\theta k) - f'_y(x, y+\theta k)]k.$$

Enfin, en appliquant la formule que nous venons de rappeler à la fonction $f'_y(x, y+\theta k)$, dans laquelle on fait varier x, on obtient finalement

$$(3) \qquad \Delta_y^k \Delta_x^h f(x, y) = f''_{yx}(x + \theta' h, y + \theta k) hk,$$

θ et θ' étant des nombres positifs inférieurs à l'unité.

Changeons l'ordre des caractéristiques, on aura évidemment

$$\Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y) = f''_{xy}(x + \theta_1 h, y + \theta'_1 k) hk,$$

θ_1 et θ'_1 étant encore des nombres positifs inférieurs à l'unité.

La comparaison des deux expressions de la même différence seconde donne

$$f''_{yx}(x + \theta' h, y + \theta k) = f''_{xy}(x + \theta_1 h, y + \theta'_1 k),$$

et, si l'on fait tendre h et k vers zéro,

$$(4) \qquad f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y).$$

61. L'égalité exprimée par la formule (4) a encore lieu lorsque la fonction dépend d'un nombre quelconque de variables indépendantes, autres que x et y. Si l'on considère une dérivée partielle d'ordre n d'une fonction de m variables arbitraires, on pourra donc, sans altérer le résultat final, changer l'ordre de deux dérivations consécutives, et par conséquent effectuer ces dérivations successives dans tel ordre que l'on voudra. Le nombre des dérivées partielles distinctes du second ordre est égal au nombre des termes d'un polynôme homogène du second degré de m variables, c'est-à-dire à $\frac{m(m+1)}{1.2}$. En général, le nombre des dérivées partielles d'ordre n distinctes est égal au nombre des termes d'un polynôme homogène du degré n à m variables, c'est-à-dire égal à

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Ce théorème permet de simplifier la notation des dérivées partielles. Dans le cas d'une fonction de trois variables, une dérivée partielle d'ordre n résultant de α dérivations effectuées par rapport à x, de β dérivations par rapport à y et de γ par rapport à z, pourra être représentée par le symbole

$$f^{n}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x, y, z), \ldots,$$

la somme $\alpha+\beta+\gamma$ étant égale à n.

62. Le produit de chaque dérivée partielle du premier ordre par l'accroissement arbitraire de la variable correspondante se nomme *différentielle partielle du premier ordre*. En nous bornant au cas d'une fonction ω de trois variables x, y, z, nous représenterons

ces différentielles partielles par les symboles

$$\partial_x^{h_1}\omega,\ \partial_y^{k_1}\omega,\ \partial_z^{l_1}\omega,$$

h_1, k_1, l_1 étant les accroissements de ces variables. *Les différentielles partielles* des *différentielles partielles du premier ordre,* prises pour de nouveaux accroissements arbitraires attribués aux variables *sont les différentielles partielles du second ordre,* et ainsi de suite. Une différentielle partielle de l'ordre n, obtenue en différentiant dans un ordre déterminé α fois par rapport à x, β fois par rapport à y, γ fois par rapport à z, s'indique en disposant les unes à la suite des autres les caractéristiques

$$\partial_x^{h_1},\ \partial_x^{h_2},\ \ldots,\ \partial_x^{h_\alpha},\quad \partial_y^{k_1},\ \partial_y^{k_2},\ \ldots,\ \partial_y^{k_\beta},\quad \partial_z^{l_1},\ \partial_z^{l_2},\ \ldots,\ \partial_z^{l_\gamma},$$

dans l'ordre où l'on a effectué les opérations. Cette différentielle partielle est égale à

$$f^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x, y, z)\, h_1 h_2 \ldots h_\alpha k_1 k_2 \ldots k_\beta l_1 l_2 \ldots l_\gamma;$$

elle ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des caractéristiques ∂.

On suppose ordinairement les accroissements relatifs à la même variable égaux entre eux; dans ce cas, on représente la différentielle précédente par le symbole $\partial^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}\omega$, et l'on a

$$(5)\qquad \partial^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}\omega = f^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x, y, z)\,\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma,$$

∂x, ∂y, ∂z étant les accroissements attribués aux variables.

De cette formule, on tire

$$f^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma} = \frac{\partial^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}\omega}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma},$$

ou, plus simplement,

$$f^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x, y, z) = \frac{\partial^n \omega}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma},$$

la signification du numérateur $\partial_n \omega$ étant indiquée sans ambiguïté par le dénominateur. Cette dernière notation est la plus usitée pour représenter les dérivées partielles; la formule (5) devient alors

$$\partial^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}\omega = \frac{\partial^n \omega}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma$$

ou

$$(6) \qquad \partial^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}\omega = \frac{\partial^n \omega}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma.$$

63. On nomme *différences partielles* du premier ordre de la fonction ω les accroissements de cette fonction qui correspondent à des accroissements déterminés h_1, k_1, l_1 des variables; nous représenterons par

$$\Delta_x^{h_1}\omega, \quad \Delta_y^{k_1}\omega, \quad \Delta_z^{l_1}\omega$$

ces différences. Les différences partielles des différences partielles du premier ordre sont les différences partielles du second ordre, et ainsi de suite. Une différence partielle de l'ordre n obtenue en effectuant dans un ordre déterminé α opérations par rapport à x, β par rapport à y, γ par rapport à z, est représentée par la succession des caractéristiques

$$\Delta_x^{h_1}, \ \Delta_x^{h_2}, \ \ldots, \ \Delta_x^{h_\alpha}, \ \Delta_y^{k_1}, \ \Delta_y^{k_2}, \ \ldots, \ \Delta_y^{k_\beta}, \ \Delta_z^{l_1}, \ \Delta_z^{l_2}, \ \ldots, \ \Delta_z^{l_\gamma},$$

disposées dans l'ordre des opérations. D'après les remarques faites aux nos 57 et 60, sur le changement de l'ordre de deux caractéristiques, dans le cas d'une fonction d'une seule variable ou de deux variables, on peut intervertir à volonté l'ordre de toutes les caractéristiques Δ.

En répétant n fois de suite des transformations analogues à celles effectuées (nos 58 et 60), on pourra évidemment exprimer la différence d'ordre n que nous

considérons par la formule

$$\Delta_z^{l_\gamma} \ldots \Delta_z^{l_2} \Delta_z^{l_1} \Delta_y^{k_\beta} \ldots \Delta_y^{k_2} \Delta_y^{k_1} \Delta_x^{h_\alpha} \ldots \Delta_x^{h_2} \Delta_x^{h_1} \omega$$

$$= f^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}\begin{pmatrix} x + \theta_1 h_1 + \theta_2 h_2 + \ldots + \theta_\alpha h_\alpha \\ y + \theta'_1 k_1 + \ldots\ldots\ldots + \theta'_\beta k_\beta \\ z + \theta''_1 l_1 + \ldots\ldots\ldots + \theta''_\gamma l_\gamma \end{pmatrix} h_1 \ldots h_\alpha . k_1 \ldots k_\beta . l_1 \ldots l_\gamma.$$

Si l'on divise cette différence par la différentielle partielle correspondante

$$\partial_z^{l_\gamma} \ldots \partial_z^{l_2} \partial_z^{l_1} \partial_y^{k_\beta} \ldots \partial_y^{k_2} \partial_y^{k_1} \partial_x^{h_\alpha} \ldots \partial_x^{h_2} \partial_x^{h_1} \omega,$$

on voit que le quotient a une limite égale à l'unité, lorsque l'on fait tendre vers zéro tous les accroissements des variables.

Calcul des différentielles des divers ordres d'une fonction composée de plusieurs fonctions.

64. Soit

$$y = f(u, v, w, \ldots)$$

une fonction composée de m fonctions $u, v, w, \ldots$ de la variable indépendante x. On a d'abord (n° 33)

$$(1) \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw + \ldots.$$

Chaque terme du second membre étant un produit de deux facteurs, on aura, par une nouvelle différentiation,

$$d^2 y = d\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + d\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv + d\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right) dw + \ldots$$
$$+ \frac{\partial y}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial y}{\partial v} d^2 v + \frac{\partial y}{\partial w} d^2 w + \ldots.$$

Or, en appliquant aux fonctions $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w}, \ldots$ la pro-

position exprimée par la formule (1), on a

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) &= \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\,du + \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\,dv + \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial w}\,dw + \ldots,\\
d\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) &= \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\,du + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\,dv + \frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial w}\,dw + \ldots,\\
d\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right) &= \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial w}\,du + \frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial w}\,dv + \frac{\partial^2 y}{\partial w^2}\,dw + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

l'expression de $d^2 y$ devient alors

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
d^2 y = \Big(&\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\,du^2 + 2\,\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + 2\,\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial w}\,du\,dw + \ldots\\
&+ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\,dv^2 + 2\,\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial w}\,dv\,dw + \ldots\Big)\\
&+ \left(\frac{\partial y}{\partial u}\,d^2 u + \frac{\partial y}{\partial v}\,d^2 v + \frac{\partial y}{\partial w}\,d^2 w + \ldots\right).
\end{aligned}\right.$$

On obtiendra successivement de la même manière les différentielles $d^3 y$, $d^4 y$, ...

65. Cas où les fonctions composantes sont linéaires. — Si toutes les fonctions u, v, w, ... sont de la forme $ax + b$, a et b étant des constantes, on a

$$d^2 u = 0,\quad d^2 v = 0,\quad d^2 w = 0,\quad \ldots,$$

et la formule (2) se réduit à

$$\begin{aligned}
d^2 y = &\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\,du^2 + 2\,\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + \ldots\\
&+ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\,av^2 + 2\,\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial w}\,dv\,dw + \ldots.
\end{aligned}$$

Cette expression de $d^2 y$ peut être représentée symboliquement par la formule

$$d^2 y = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv + \frac{\partial y}{\partial w}\,dw + \ldots\right)^2 = (dy)^2,$$

en entendant qu'après avoir formé le carré de dy on y remplacera

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right), \quad \ldots$$

respectivement par

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \quad \ldots.$$

Ce résultat peut être généralisé et je dis que l'on aura, quel que soit n,

$$d^n y = \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw + \ldots\right)^n = (dy)^n,$$

pourvu que, après avoir formé la puissance $n^{\text{ième}}$ de dy, on remplace dans chaque terme les facteurs de la forme

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^\alpha \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^\beta \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^\gamma \ldots$$

par les dérivées correspondantes

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots} y}{\partial u^\alpha \partial v^\beta \partial w^\gamma \ldots}.$$

En effet, notre formule symbolique donne la vraie valeur de dy quand $n = 1$; il suffit donc, pour l'établir, de montrer que, si elle a lieu pour une valeur de n, elle subsiste pour la valeur immédiatement supérieure. Admettons donc la légitimité de la formule pour l'indice n, et soit

$$C \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^\alpha \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^\beta \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^\gamma \ldots du^\alpha dv^\beta dw^\gamma \ldots$$

un terme de son développement. Le terme correspondant de la vraie valeur de $d^n y$ sera

$$C \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots} y}{\partial u^\alpha \partial v^\beta \partial w^\gamma \ldots} du^\alpha dv^\beta dw^\gamma \ldots.$$

Maintenant, pour avoir $d^{n+1}y$, il faut différentier $d^n y$, et le terme que nous venons d'écrire donnera

$$C\left(\frac{\partial^{\alpha+6+\ldots+1}y}{\partial u^{\alpha+1}\partial v^{6}\ldots}du+\frac{\partial^{\alpha+6+\ldots+1}y}{\partial u^{\alpha}\partial v^{6+1}\ldots}dv+\ldots\right)du^{\alpha}dv^{6}\ldots,$$

puisque du, dv, dw, ... sont constantes. Or, par notre convention, ce résultat peut s'écrire symboliquement comme il suit :

$$C\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^{6}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^{\gamma}\ldots du^{\alpha}dv^{6}dw^{\gamma}\ldots$$
$$\times\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv+\frac{\partial y}{\partial w}dw+\ldots\right),$$

d'où il suit que l'expression symbolique de $d^{n+1}y$ sera $(dy)^n \times dy$ ou $(dy)^{n+1}$, ce qui démontre la proposition énoncée.

Cas d'un produit de plusieurs fonctions.

66. Il ne sera pas inutile d'indiquer ici la formule générale qui fait connaître l'expression des différentielles des divers ordres du produit de plusieurs fonctions.

Considérons d'abord le produit uv des deux fonctions u et v. On a d'abord

$$(1)\qquad d(uv) = vdu + udv,$$

puis

$$d^2(uv) = d(vdu) + d(udv) = (vd^2u + dvdu) + (dvdu + ud^2v),$$

ou

$$(2)\qquad d^2(uv) = vd^2u + 2dvdu + ud^2v;$$

une nouvelle différentiation donnera

$$(3)\qquad d^3(uv) = vd^3u + 3dvd^2u + 3d^2vdu + ud^3v.$$

Dans les formules (1), (2), (3), l'ordre des différentielles de u diminue d'une unité, et celui des différentielles de v augmente d'une unité quand on passe d'un terme au terme suivant; en outre, les coefficients numériques sont respectivement les mêmes que dans les développements des première, deuxième et troisième puissances d'un binôme. On est donc fondé à présumer que l'on a généralement

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} d^n(uv) &= v\,d^n u + \frac{n}{1}\,dv\,d^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1.2}\,d^2v\,d^{n-2}u + \ldots \\ &\quad + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}\,d^kv\,d^{n-k}u + \ldots + d^nv.u. \end{aligned}\right.$$

Cette formule ayant été vérifiée pour $n = 1, 2, 3$, sa généralité sera établie si, admettant qu'elle a lieu pour l'ordre n, on démontre qu'elle subsiste pour l'ordre $n+1$. Différentions donc la formule (4) et écrivons sur une même ligne les parties qui proviennent de la différentiation des deuxièmes facteurs dans les différents termes, et sur une seconde ligne les parties qui proviennent de la différentiation des premiers facteurs. On aura

$$\begin{aligned} &d^{n+1}(uv) \\ &= v\,d^{n+1}u + \frac{n}{1}\,dv\,d^n u + \frac{n(n-1)}{1.2}\,d^2v\,d^{n-1}u + \ldots + d^nv\,du \\ &\quad + dv\,d^n u + \frac{n}{1}\,d^2v\,d^{n-1}u + \ldots + \frac{n}{1}\,d^nv\,du + d^{n+1}v.u. \end{aligned}$$

En faisant la réduction des termes semblables, on aura une formule qui se déduit évidemment de la formule (4) par le changement de n en $n+1$; donc celle-ci est générale.

La formule (4) peut être écrite *symboliquement* de la manière suivante :

$$d^n(uv) = (du + dv)^n;$$

effectivement, si l'on exécute le développement de la $n^{\text{ième}}$ puissance de la somme $du + dv$, en ayant soin d'écrire en facteur dans le premier terme la puissance zéro de dv, et dans le dernier la puissance zéro de du, puis qu'on remplace

$$(du)^k, \quad (dv)^k$$

respectivement par

$$d^k u, \quad d^k v$$

quand k n'est pas nul, et par

$$u, \quad v$$

quand k est nul, il est évident qu'on reproduira la formule (4).

67. Considérons maintenant un produit de m facteurs, $u, v, \ldots, w, s$; je dis que l'on a encore *symboliquement*

$$d^n(uv\,..ws) = (du + dv + \ldots + dw + ds)^n;$$

c'est-à-dire que, pour avoir la différentielle d'ordre n du produit $uvw\ldots s$, il suffit de former le développement de la puissance $n^{\text{ième}}$ de la somme

$$du + dv + \ldots + dw + ds,$$

en ayant soin d'introduire en facteur dans chaque terme la puissance zéro de celles des différentielles $du, dv, \ldots, dw, ds$ qui n'y figurent pas, et de remplacer ensuite les puissances

$$du^k, \quad dv^k, \quad \ldots, \quad dw^k, \quad ds^k$$

par les différentielles d'ordre k,

$$d^k u, \quad d^k v, \quad \ldots, \quad d^k w, \quad d^k s,$$

celles-ci devant d'ailleurs être réduites à

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w, \quad s$$

quand k est zéro.

Cette proposition est démontrée dans le cas de deux facteurs; donc, pour en établir la généralité, il suffit de prouver que, si elle a lieu pour un produit de $m-1$ facteurs, elle subsiste encore dans le cas d'un produit de m facteurs. A cet effet, désignons par y le produit des $m-1$ facteurs $u, v, \ldots, w$. On aura symboliquement

$$d^n(uv\ldots ws) = d^n(ys) = (dy + ds)^n.$$

Considérons un terme quelconque du développement de cette puissance, savoir :

$$C_k dy^k ds^{n-k};$$

d'après ce qui a été dit plus haut, ce terme donnera dans $d^n(uv\ldots ws)$ le terme correspondant

$$C_k d^k y d^{n-k} s.$$

Or, par hypothèse, on a symboliquement

$$d^k y = (du + dv + \ldots + dw)^k;$$

donc le terme précédent écrit symboliquement sera

$$C_k (du + dv + \ldots + dw)^k ds^{n-k},$$

et, en faisant la somme de tous les termes, on aura encore symboliquement

$$d^n(uv\ldots ws) = (du + dv + \ldots + dw + ds)^n.$$

Différentielles des divers ordres des fonctions implicites.

68. Considérons d'abord le cas d'une fonction y de la variable x, définie par une équation donnée

$$f(x, y) = 0.$$

y étant une fonction de x, $f(x, y)$ est une fonction composée, et, puisque cette fonction a une valeur constante qui est zéro, ces différentielles de tous les ordres sont nulles. On a donc, en égalant à zéro ces diverses différentielles, et en observant que dx est une constante,

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2\right) + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3\right) + 3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\right) d^2 y + \frac{\partial f}{\partial y} d^3 y = 0,$$

....

Ces formules font connaître successivement les différentielles dy, d^2y, d^3y, ..., et, par suite, les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ...

69. Considérons maintenant le cas le plus général où l'on a m équations

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, u, \ldots) = 0, \\ F(x, y, z, u, \ldots) = 0, \\ \varphi(x, y, z, u, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

entre une variable indépendante x et m fonctions y, z, u, ... de cette variable.

y, z, u, ... sont des fonctions de x, et par conséquent f, F, φ, ... sont des fonctions composées dont les valeurs sont nulles; les différentielles des divers ordres de ces fonctions sont donc nulles elles-mêmes. En différentiant

une première fois les équations (1), on obtient les équations

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy + \dfrac{\partial F}{\partial z}dz + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

qui détermineront, comme on l'a vu (n° 50), les différentielles du premier ordre

$$dy,\quad dz,\quad du,\quad \ldots.$$

La différentiation des équations (2) donnera ensuite le nouveau système

$$(3)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy + \ldots\right) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}d^2y + \dfrac{\partial f}{\partial z}d^2z + \ldots\right) = 0, \\ \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dx\,dy + \ldots\right) + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}d^2y + \dfrac{\partial F}{\partial z}d^2z + \ldots\right) = 0, \\ \left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\partial y}dx\,dy + \ldots\right) + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}d^2y + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}d^2z + \ldots\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

qui détermine les différentielles du deuxième ordre

$$d^2y,\quad d^2z,\quad d^2u,\quad \ldots.$$

On obtiendra les différentielles du troisième ordre en différentiant les équations (3), et ainsi de suite.

Sur l'élimination des arbitraires.

70. Lorsque l'équation

$$(1)\qquad f(x, y, a, b, c, \ldots) = 0,$$

qui lie une fonction y à sa variable indépendante x, renferme n constantes ou paramètres arbitraires $a, b, c, \ldots$, on peut toujours éliminer ces arbitraires par le moyen de la différentiation. Effectivement, si l'on différentie n fois l'équation (1), on obtiendra n équations nouvelles

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}=0, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dfrac{dy^2}{dx^2}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2y}{dx^2}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et si l'on élimine ensuite les n paramètres $a, b, c, \ldots$, entre les équations (1) et (2), on formera une équation résultante

$$(3)\qquad F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0,$$

entre x, y et les n premières dérivées de y. Cette équation (3) est dite une *équation différentielle de l'ordre n*.

La question que nous traitons ici n'est qu'un cas particulier de celle dont nous nous sommes occupé au nº 53 et qui nous a conduit à la notion des systèmes d'équations différentielles simultanées.

En effet, posons

$$(4)\quad \frac{dy}{dx}=y',\quad \frac{dy'}{dx}=y'',\quad \ldots,\quad \frac{dy^{(n-2)}}{dx}=y^{(n-1)},$$

et joignons à l'équation (1) les $n-1$ premières de celles qui composent le système (2), on formera ainsi un système de n équations entre la variable x, les n fonctions y, $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ et les n arbitraires. En outre, il est évident que les n équations qu'on obtient en différentiant ce système peuvent être remplacées par les équations (4) jointes à la dernière des équations (2), et que

l'élimination des arbitraires entre les $2n$ équations dont nous venons de parler fournira un système de n équations différentielles simultanées du premier ordre qui se composera des $n-1$ équations (4) et de l'équation (3) réduite au premier ordre, par l'introduction des nouvelles variables y', y'', ..., $y^{(n-1)}$. Cette équation sera donc

$$F\left(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\ \frac{dy^{(n-1)}}{dx}\right)=0.$$

Du changement de la variable indépendante.

71. Lorsqu'on a à considérer plusieurs variables qui dépendent de l'une d'entre elles, on peut choisir à volonté celle qui sera regardée comme indépendante ou dont la différentielle sera constante. Mais il peut arriver que, après avoir désigné cette variable indépendante, on reconnaisse qu'il est plus avantageux d'en choisir une autre; il faut alors modifier les formules. Telle est la question qui va nous occuper, et que nous énoncerons comme il suit :

Soient x la variable qui a été choisie pour variable indépendante et y l'une des autres variables qu'il y a lieu de considérer; on demande d'exprimer les dérivées

$$\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3},\quad \ldots,$$

prises dans l'hypothèse de dx constante, en fonction des différentielles de x et de y, considérées comme fonctions d'une même variable indépendante quelconque.

Désignons par

$$y',\quad y'',\quad y''',\quad \ldots$$

les dérivées de y prises dans l'hypothèse où x est la

variable indépendante. On aura

$$(1)\qquad dy = y'\,dx,\quad dy' = y''\,dx,\quad dy'' = y'''\,dx,\quad \ldots,$$

et, d'après le principe du n° **21**, ces formules subsistent quelle que soit la variable indépendante. La première formule (1) donne

$$(2)\qquad y' = \frac{dy}{dx},$$

résultat connu et d'après lequel y' est le quotient de dy par dx. Appliquant à cette formule (2) la règle de la différentiation des quotients, il viendra, quelle que soit la variable indépendante,

$$dy' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2};$$

mais, d'après la deuxième des formules (1), dy' est égale à $y''dx$; donc on a

$$(3)\qquad y'' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

Appliquant de nouveau la règle de la différentiation des quotients, il vient

$$dy'' = \frac{dx(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3\,d^2x(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^4},$$

et comme $dy'' = y'''dx$, d'après la troisième formule (1), on aura

$$(4)\qquad y''' = \frac{dx(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3\,d^2x(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5}.$$

En suivant la même marche, on obtiendra successivement y^{IV}, y^{V}, ... Il est évident que $y^{(n)}$ s'exprimera par le moyen des différentielles de x et de y, jusqu'à celles de l'ordre n.

Si dans les formules (2), (3), (4), ... on suppose dx constante, on retrouvera les formules

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \dots.$$

Si l'on veut choisir y pour variable indépendante et que l'on fasse en conséquence $dy = \text{const.}$, les formules (2), (3), (4), ... deviendront

$$y' = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}, \quad y'' = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

$$y''' = -\frac{\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}, \quad \dots.$$

On verra dans la suite qu'il y a souvent avantage, au point de vue de la symétrie et de l'élégance des formules, à ne pas fixer la variable indépendante.

Du changement de toutes les variables.

72. La question que nous nous proposons de résoudre peut être énoncée comme il suit :

Soient $x, y, z, \dots$ des variables qui dépendent de l'une d'entre elles; x celle de ces variables dont la différentielle est regardée comme constante, et V une fonction donnée de x et de

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots, \quad z, \quad \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2z}{dx^2}, \quad \dots, \quad \dots.$$

On demande de trouver ce que deviendra l'expression

de V quand on substituera à $x, y, z, \ldots$ d'autres variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, et que l'on choisira l'une de ces dernières, ξ par exemple, pour variable indépendante.

Pour résoudre cette question, on commencera par transformer l'expression de V, au moyen des formules du numéro précédent, de manière que la variable indépendante ne soit plus désignée; alors V deviendra une fonction de $x, y, z, \ldots$ et de leurs différentielles.

Cela étant, comme les variables $x, y, z, \ldots$ sont données en fonction des nouvelles variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, on aura des équations telles que

$$x = f(\xi, \eta, \zeta, \ldots), \quad y = \mathrm{F}(\xi, \eta, \zeta, \ldots), \quad z = \varphi(\xi, \eta, \zeta, \ldots), \quad \ldots,$$

et de ces équations on tirera, par la différentiation, les valeurs de

$$dx, \ dy, \ dz, \ \ldots, \ d^2x, \ d^2y, \ d^2z, \ \ldots, \ \ldots,$$

en ayant soin de supposer $d\xi$ constante, conformément à l'énoncé. Il n'y aura plus qu'à substituer toutes ces valeurs dans V pour achever la solution du problème.

73. Applications. — *Soient x et y les coordonnées rectangulaires d'une courbe donnée dont la première x est prise pour variable indépendante. On demande ce que devient la fonction*

$$\mathrm{V} = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

quand on substitue aux coordonnées rectangulaires x, y les coordonnées polaires ρ, ω et que l'on prend ω pour variable indépendante.

Au moyen des formules du n° 71, l'expression de V devient

$$V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

et ici la variable indépendante n'est plus désignée.

Cela posé, on a

$$x = \rho \cos\omega, \quad y = \rho \sin\omega,$$

d'où, par la différentiation,

$$dx = d\rho \cos\omega - \rho \sin\omega\, d\omega,$$
$$dy = d\rho \sin\omega + \rho \cos\omega\, d\omega.$$

Différentiant de nouveau et prenant $d\omega = $ const., on aura

$$d^2x = d^2\rho \cos\omega - 2d\rho \sin\omega\, d\omega - \rho \cos\omega\, d\omega^2,$$
$$d^2y = d^2\rho \sin\omega + 2d\rho \cos\omega\, d\omega - \rho \sin\omega\, d\omega^2.$$

On déduit de ces formules

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2,$$
$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = -\rho\, d^2\rho\, d\omega + 2d\rho^2 d\omega + \rho^2 d\omega^3;$$

on a donc

$$V = \frac{(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{-\rho\, d^2\rho\, d\omega + 2d\rho^2 d\omega + \rho^2 d\omega^3}$$

ou

$$V = \frac{\left(\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\frac{d\rho^2}{d\omega^2} - \rho\frac{d^2\rho}{d\omega^2}},$$

74. Dans les questions où il y a lieu d'exécuter un changement de variables, il peut arriver que les anciennes variables ne soient pas données immédiatement en fonc-

tion des nouvelles, mais qu'elles soient liées à celles-ci par des équations différentielles données. Dans les cas dont nous parlons, il arrive quelquefois que les équations différentielles données suffisent avec celles qu'on en déduit, par la différentiation, pour éliminer les anciennes variables de l'expression qu'il s'agit de transformer. Nous allons en donner un exemple; à cet effet, nous reprendrons la fonction

$$(1)\qquad V = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

dont nous nous sommes occupé au numéro précédent, et nous allons chercher ce que devient cette expression de V quand on substitue à x et y deux autres variables ρ et s liées aux premières par les équations

$$(2)\qquad x^2+y^2=\rho^2,$$

$$(3)\qquad dx^2+dy^2=ds^2,$$

et que l'on prend ds pour la différentielle constante.

Nous commencerons par transformer V de manière que la variable indépendante ne soit plus désignée, et nous obtiendrons, comme précédemment,

$$(4)\qquad V = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Cela posé, la différentiation des équations (2) et (3) donne

$$(5)\qquad x\,dx + y\,dy = \rho\,d\rho,$$

$$(6)\qquad dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0;$$

enfin on a, en différentiant l'équation (5),

$$(x\,d^2x + y\,d^2y) + (dx^2+dy^2) = \rho\,d^2\rho + d\rho^2,$$



ou, à cause de la formule (3),

$$(7)\qquad x\,d^2x + y\,d^2y = \rho\,d^2\rho + d\rho^2 - ds^2.$$

Les formules (6) et (7) donnent

$$(y\,dx - x\,dy)\,d^2x = -(\rho\,d^2\rho + d\rho^2 - ds^2)\,dy,$$
$$(y\,dx - x\,dy)\,d^2y = +(\rho\,d^2\rho + d\rho^2 - ds^2)\,dx,$$

d'où

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = \frac{(\rho\,d^2\rho + d\rho^2 - ds^2)\,ds^2}{y\,dx - x\,dy};$$

on a d'ailleurs

$$y\,dx - x\,dy = \sqrt{(x^2+y^2)(dx^2+dy^2) - (x\,dx + y\,dy)^2}$$
$$= \rho\sqrt{ds^2 - d\rho^2}:$$

donc

$$(8)\qquad dx\,d^2y - dy\,d^2x = \frac{(\rho\,d^2\rho + d\rho^2 - ds^2)\,ds^2}{\rho\sqrt{ds^2 - d\rho^2}}.$$

Au moyen des formules (3) et (8), la valeur de V devient

$$V = \frac{\rho\,ds\sqrt{ds^2 - d\rho^2}}{\rho\,d^2\rho + d\rho^2 - ds^2},$$

ou

$$V = \frac{\rho\sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds^2}}}{\rho\frac{d^2\rho}{ds^2} + \frac{d\rho^2}{ds^2} - 1}.$$



CHAPITRE IV.

DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES DES DIVERS ORDRES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

De la différentielle totale du premier ordre d'une fonction de plusieurs variables indépendantes.

75. On nomme *différentielle totale* d'une fonction de plusieurs variables la somme des différentielles partielles relatives aux diverses variables ; on représente cette différentielle par la caractéristique d. Ainsi l'on a

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

De cette définition découlent les conséquences suivantes :

1° *Si pour les valeurs des variables indépendantes $x, y, \ldots, t$, comprises respectivement entre certaines limites, une fonction u se réduit à une constante, sa différentielle du est nulle ; et réciproquement, si la différentielle de la fonction u est constamment nulle, la fonction se réduit à une constante.*

En effet, si u se réduit à une constante, les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial t}$ sont toutes nulles (n° 15) ; donc la différentielle du est nulle aussi.

En second lieu, si l'on a $du = 0$, ou

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}dt = 0,$$



comme dx, dy, ..., dt sont des quantités arbitraires, on doit avoir séparément

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

La première de ces formules montre que u est indépendante de x (nº 15), la deuxième que u est indépendante de y, ..., enfin la dernière que u est indépendante de t. On a donc

$$u = \text{const.}$$

2° *Si pour les valeurs des variables indépendantes $x, y, \ldots, t$, comprises respectivement entre certaines limites, deux fonctions v et w ne diffèrent que par une constante, les différentielles de ces fonctions sont égales; et réciproquement, si les différentielles des fonctions v et w sont égales, ces fonctions ne diffèrent que par une constante.*

Cette proposition est contenue dans la précédente en supposant dans celle-ci $u = v - w$.

Théorème relatif à la différentiation d'une fonction composée de fonctions de plusieurs variables indépendantes.

76. Théorème. — *Si u désigne une fonction de plusieurs variables $x, y, z, \ldots, t$, qui soient elles-mêmes des fonctions de certaines variables indépendantes, on aura*

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}dt,$$

comme si $x, y, z, \ldots, t$ étaient les variables indépendantes.

En effet, soient ξ, η, ζ, ..., ω les variables indépen-

dantes; si l'on remplace $x, y, z, \ldots, t$ par leurs valeurs fonctions de $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$, on obtiendra l'expression de u en fonction de ces mêmes variables. Cela posé, on a, par définition,

$$du = \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\zeta + \ldots + \frac{\partial u}{\partial \omega} d\omega.$$

Or $\frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi$ est la différentielle partielle de u regardée comme une fonction de la seule variable ξ dont dépendent $x, y, z, \ldots, t$; donc on a, par la règle de la différentiation des fonctions composées de fonctions d'une variable indépendante,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi\right) + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial \xi} d\xi\right);$$

on a aussi, par l'application de la même règle,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta\right) + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial \eta} d\eta\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} d\omega = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega\right) + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial \omega} d\omega\right).$$

En ajoutant toutes ces égalités, on formera l'expression suivante de du :

$$\begin{aligned} du = {} & \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \ldots + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega\right) \\ & + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \ldots + \frac{\partial y}{\partial \omega} d\omega\right) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial t}{\partial \eta} d\eta + \ldots + \frac{\partial t}{\partial \omega} d\omega\right); \end{aligned}$$



or les sommes qui multiplient respectivement les dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial t},$$

dans cette formule, sont précisément les valeurs des différentielles dx, dy, ..., dt; on a donc

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Corollaire. — *Les règles de la différentiation des sommes, des produits, des quotients et des puissances de fonctions d'une seule variable sont applicables au cas des fonctions de plusieurs variables indépendantes.*

Différentielles totales des ordres supérieurs des fonctions de plusieurs variables indépendantes.

77. Soit du la différentielle totale de la fonction u. Nous désignerons par d^2u la différentielle totale ddu de du, prise en attribuant aux variables des accroissements égaux à ceux qui entrent dans l'expression de du, par d^3u la différentielle totale de d^2u, et ainsi de suite, en sorte que, dans la suite

$$(1) \qquad du, \quad d^2u, \quad d^3u, \quad \ldots, \quad d^nu, \quad \ldots,$$

chaque terme exprimera la différentielle totale du terme précédent.

Les fonctions (1) sont dites les *différentielles totales du premier, du deuxième, etc., ordre* de la fonction u.

La différentielle totale du premier ordre a pour expression

$$(2) \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

et l'on en déduit que la différentielle totale d'ordre n peut être représentée symboliquement par la formule

$$(3)\qquad d^n u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\,dt\right)^n,$$

pourvu que, après avoir exécuté le développement du second membre, on remplace, dans chaque terme, les facteurs de la forme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^\beta \cdots \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^\omega$$

par la dérivée partielle

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots+\omega} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \ldots \partial t^\omega}.$$

Il suffit, en effet, pour justifier cette assertion, de répéter ici textuellement le raisonnement dont nous avons fait usage au n° 65, en traitant de la différentiation des fonctions composées de fonctions linéaires d'une seule variable. Les deux questions sont évidemment les mêmes, puisque les différentielles des variables sont constantes dans l'un et l'autre cas, et qu'ainsi les différentiations successives suivent la même loi.

78. La formule (2) du numéro précédent subsiste (n° 76) quand $x, y, z, \ldots, t$ cessent de représenter les variables indépendantes; mais il n'en est pas de même de la formule (3) quand n est > 1, à moins que $x, y, z, \ldots, t$ ne soient des fonctions linéaires des variables indépendantes. Dans le cas général, $dx, dy, \ldots, dt$ ne sont plus constantes, et pour avoir $d^2 u$ il faut différentier la formule (2), en considérant chaque terme comme un produit de deux facteurs variables; la règle de la différentiation des pro-

duits étant applicable aux différentielles totales, on a

$$d^2 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t} dt\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial u}{\partial y} d^2 y + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t} d^2 t\right),$$

en écrivant d'une manière symbolique la partie de cette expression qui est indépendante des différentielles des ordres supérieurs au premier. On pourra calculer, en suivant la même marche, les différentielles totales $d^3 u$, $d^4 u$, ...

Mais, dans la plupart des cas, il est préférable de chercher séparément les diverses dérivées partielles qui concourent à former les différentielles totales dont on a besoin, ce qui ramène le problème au cas des fonctions d'une seule variable. Effectivement, si ξ, η, ..., ω désignent les variables indépendantes et qu'on veuille calculer

$$\frac{\partial^n u}{\partial \xi^\alpha d\eta^6 \ldots},$$

on différentiera l'équation

$$u = f(x, y, z, \ldots, t)$$

α fois par rapport à ξ, ce qui donnera $\frac{\partial^\alpha u}{\partial \xi^\alpha}$. On différentiera 6 fois le résultat obtenu par rapport à y, ce qui donnera $\frac{\partial^{\alpha+6} u}{\partial \xi^\alpha \partial \eta^6}$, et ainsi de suite.

Calcul des différentielles totales des divers ordres des fonctions implicites de plusieurs variables indépendantes.

79. Le cas le plus général des fonctions implicites est celui où l'on donne m équations entre n variables indé-

pendantes et m fonctions de ces variables. Les seconds membres des équations dont il s'agit étant supposés nuls, les premiers membres sont des fonctions composées de fonctions des n variables indépendantes qui se réduisent à zéro; par conséquent, leurs différentielles totales des divers ordres sont nulles. On peut donc, par des différentiations successives, déduire des équations proposées des systèmes nouveaux qui feront connaître successivement les différentielles totales du premier ordre des m fonctions considérées, puis les différentielles totales de deuxième ordre, et ainsi de suite.

80. Mais, au lieu de calculer directement les différentielles totales, on peut chercher séparément les diverses dérivées partielles qui figurent dans leurs expressions : le calcul de ces dérivées partielles s'exécutera par la règle qui se rapporte aux fonctions implicites d'une seule variable indépendante.

Considérons, par exemple, le cas d'une fonction z des variables x, y, liée à ces variables par une équation donnée

$$(1)\qquad f(x, y, z) = 0.$$

Soient p et q les dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, on aura

$$dz = p\,dx + q\,dy;$$

on aura aussi, en désignant par r, s, t les dérivées partielles du deuxième ordre $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$,

$$d^2 z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$

et ainsi de suite. Il faut remarquer que les différentielles

totales dp, dq ont respectivement pour valeurs

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy.$$

Cela posé, pour avoir p et q, on différentiera l'équation proposée en regardant d'abord x comme seule variable et ensuite y comme seule variable : on aura ainsi (n° 46)

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

d'où

$$(3)\qquad p = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Maintenant, pour avoir r, s, t, il suffit de différentier les équations (2) ou, si l'on veut, les équations (3). En différentiant les équations (2), d'abord par rapport à x, puis par rapport à y, on obtient trois équations distinctes, savoir :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + p^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + r\frac{\partial f}{\partial z} = 0,\\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + q\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + p\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} + pq\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + s\frac{\partial f}{\partial z} = 0,\\ &\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2q\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} + q^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + t\frac{\partial f}{\partial z} = 0,\end{aligned}\right.$$

qui détermineront les dérivées partielles r, s, t. Il faut remarquer que la différentiation de la première équation (2) par rapport à y donne le même résultat que la différentiation de la seconde équation par rapport à x.

La différentiation des équations (4) donnera les dérivées partielles du troisième ordre, et ainsi de suite.

81. Exemple. — Soit l'équation

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

entre les variables indépendantes x, y et la fonction z de ces variables; si l'on fait, comme précédemment,

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$
$$dp=r\,dx+s\,dy,$$
$$dq=s\,dx+t\,dy,$$

on trouvera successivement

$$x+pz=0,\quad y+qz=0,$$

puis

$$1+p^2+rz=0,\quad pq+sz=0,\quad 1+q^2+tz=0;$$

d'où l'on tire

$$p=-\frac{x}{z},\quad q=-\frac{y}{z},$$

$$r=-\frac{x^2+z^2}{z^3},\quad s=-\frac{xy}{z^3},\quad t=-\frac{y^2+z^2}{z^3}.$$

De l'élimination des fonctions arbitraires.

82. On a vu, dans la théorie des fonctions d'une seule variable, comment on peut former des *équations différentielles* ou des *systèmes d'équations différentielles simultanées,* par la différentiation et l'élimination de constantes arbitraires. Une question analogue se présente dans l'étude des fonctions de plusieurs variables; mais ici les arbitraires que l'on peut éliminer par la différentiation sont des fonctions et non plus de simples constantes; les équations différentielles que l'on obtient par cette voie sont dites *équations aux dérivées partielles.* Nous nous bornerons, dans ce qui va suivre, au cas de

l'élimination d'une seule fonction arbitraire; l'équation aux dérivées partielles qui résulte de cette élimination est alors *du premier ordre*.

Considérons d'abord trois variables x, y, z dont les deux premières soient indépendantes. Soient u et v deux fonctions *données* de ces variables et $\Phi(u, v)$ une fonction *arbitraire* de u et de v. Nous supposons que la fonction z soit liée aux variables x, y par l'équation

$$(1) \qquad \Phi(u, v) = 0,$$

et nous nous proposons de trouver une équation, entre x, y, z et les dérivées partielles de z, qui soit indépendante de la fonction Φ.

On peut, si l'on veut, supposer l'équation (1) résolue par rapport à v; alors on a

$$v = \varphi(u),$$

et, comme la fonction Φ est arbitraire, la fonction φ l'est aussi; mais il n'y a aucune raison pour préférer cette dernière forme à la précédente.

Les dérivées des fonctions u et v par rapport à x sont, d'après la règle du n° 33,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z};$$

pareillement les dérivées des mêmes fonctions par rapport à y sont

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z},$$

en posant, comme au n° 80,

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Si donc on différentie l'équation (1), d'abord par rapport

à x, puis par rapport à y, on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0,\\ &\frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Ces équations sont homogènes par rapport à $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial v}$, et l'élimination de ces dérivées donne immédiatement l'équation

$$(3)\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0.$$

Si l'on effectue les multiplications indiquées et qu'on fasse, pour abréger,

$$\mathrm{P}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\mathrm{Q}=\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\mathrm{V}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$

l'équation (3) deviendra

$$(4)\qquad \mathrm{P}p+\mathrm{Q}q=\mathrm{V}.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles du premier ordre que nous voulions former : elle est *linéaire* par rapport aux dérivées partielles p et q ; P, Q, V y désignent des fonctions données des trois variables x, y, z.

83. Le résultat que nous venons d'obtenir s'étend de lui-même au cas d'un nombre quelconque de variables indépendantes. Effectivement, si

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

désignent $n+1$ variables dont les n dernières soint indépendantes, et que l'on fasse

$$dx = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_n\, dx_n;$$

si, en outre,

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$$

représentent n fonctions données des variables x, x_1, ..., x_n, l'équation

$$\Phi(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n) = 0 \tag{1}$$

donnera, par l'élimination de la fonction arbitraire Φ, une équation aux dérivées partielles du premier ordre qui sera linéaire relativement aux dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Pour démontrer ce théorème, différentions l'équation (1) successivement par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on aura

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right) + \ldots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right) + \ldots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right) + \ldots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right) = 0, \end{array} \right.$$

et il est évident que, si l'on nomme D le déterminant de n^2 quantités :

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial u_n}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial u_n}{\partial x} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \cdots & \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} + p^n \dfrac{\partial u_n}{\partial x} \end{vmatrix}$$

l'équation qui résulte de l'élimination de $\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial u_n}$ entre les équations (2) sera

$$D = 0.$$

Désignons par Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

et par Δ_m ce que devient Δ quand on y remplace la $m^{\text{ième}}$ ligne horizontale, savoir

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_m}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_m}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u_n}{\partial x_m};$$

par

$$(3) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u_n}{\partial x}.$$

Il est évident que, si l'on remplace la première ligne de Δ par la première ligne de D, on obtiendra un nouveau déterminant $\Delta^{(1)}$ dont la valeur sera

$$\Delta^{(1)} = \Delta + p_1 \Delta_1;$$

remplaçons la deuxième ligne horizontale de ce déterminant $\Delta^{(1)}$ par la deuxième ligne horizontale de D, on obtiendra un nouveau déterminant $\Delta^{(2)}$. Or, par le changement dont il s'agit, Δ devient $\Delta + p_2 \Delta_2$; quant à $p_1 \Delta_1$, il ne change pas, car la quantité dont il s'accroît est un déterminant dans lequel deux lignes horizontales sont composées de quantités proportionnelles aux quantités (3)

et dont la valeur est, en conséquence, zéro ; ainsi l'on a

$$\Delta^{(2)} = \Delta + p_1 \Delta_1 + p_2 \Delta_2.$$

Le même raisonnement prouve que si, dans le déterminant $\Delta^{(2)}$, on remplace la troisième ligne horizontale par la troisième ligne de D, on obtiendra un déterminant $\Delta^{(3)}$ dont la valeur sera

$$\Delta^{(3)} = \Delta + p_1 \Delta_1 + p_2 \Delta_2 + p_3 \Delta_3,$$

et, en continuant ainsi, on trouvera que le déterminant $\Delta^{(n)}$ ou D dont nous nous occupons a pour valeur

$$D = \Delta + p_1 \Delta_1 + p_2 \Delta_2 + \ldots + p_n \Delta_n,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

84. Théorème relatif aux fonctions homogènes. — Une fonction de plusieurs variables est dite *homogène* lorsque, les variables étant multipliées par une indéterminée t, la fonction se reproduit multipliée par une puissance t^m de t. L'exposant m de cette puissance peut être entier ou fractionnaire, positif, nul ou négatif ; il est dit le *degré d'homogénéité* de la fonction.

D'après cela, si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une fonction homogène, on aura, quel que soit t,

$$t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n),$$

et, en faisant $t = \frac{1}{x_n}$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n^m f\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right);$$

ainsi toute fonction homogène x des n variables x_1, x_2, $\ldots$, x_n peut se mettre sous la forme

$$x = x_n^m F\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

On peut exprimer, par le moyen des dérivées partielles, cette même propriété des fonctions homogènes, et à cet effet il suffit d'appliquer la méthode du numéro précédent à l'équation

$$(1) \qquad u_n = \mathrm{F}(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}),$$

où nous supposons

$$u_1 = \frac{x_1}{x_n}, \quad u_2 = \frac{x_2}{x_n}, \quad \ldots, \quad u_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad u_n = \frac{x}{x_n^m}.$$

Si l'on fait, comme précédemment,

$$dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n,$$

on formera les équations

$$\frac{p_1}{x_n^m} = \frac{1}{x_n}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_1}, \quad \frac{p_2}{x_n^m} = \frac{1}{x_n}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_{n-1}}{x_n^m} = \frac{1}{x_n}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_{n-1}},$$

$$\frac{p_n}{x_n^m} - \frac{mx}{x_n^{m+1}} = -\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_1}\frac{x_1}{x_n^2} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_2}\frac{x_2}{x_n^2} + \ldots + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_{n-1}}\frac{x_{n-1}}{x_n^2}\right).$$

En ajoutant toutes ces équations, après les avoir multipliées respectivement par $x_1 x_n^m$, $x_2 x_n^m$, ..., on aura

$$mx = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n,$$

d'où il suit que :

Théorème. — *Toute fonction homogène du degré m est égale au quotient de la division par m de la somme de ses dérivées partielles du premier ordre, multipliées respectivement par les variables correspondantes.*

Corollaire. — *Les dérivées partielles d'une fonction homogène de degré m sont des fonctions homogènes de degré m — 1.*

Cela résulte immédiatement des formules

$$p_1 = x_n^{m-1}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_1}, \quad \ldots.$$

85. L'élimination dont nous venons de nous occuper conduit à des équations aux dérivées partielles qui sont linéaires par rapport aux dérivées. Il nous reste à faire connaître le procédé général au moyen duquel sont formées, comme on le verra dans le Calcul intégral, toutes les équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Examinons d'abord le cas de trois variables x, y, z dont les deux premières sont indépendantes, et posons

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Soient α un paramètre variable, $\varphi(\alpha)$ une fonction arbitraire de ce paramètre, et

$$V = f[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)]$$

une fonction donnée des cinq quantités $x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)$.

Considérons le système des deux équations

$$(1) \qquad V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0.$$

Si la fonction arbitraire φ était fixée, et que l'on pût éliminer α entre les équations (1), on aurait une équation entre les trois variables x, y, z. Mais, lors même que la fonction φ demeure arbitraire, on peut toujours regarder z comme une fonction de x et de y déterminée par le système des équations (1). Cela posé, nous nous proposons d'éliminer la fonction φ des équations (1), par le moyen de la différentiation. On peut raisonner comme si l'élimination de α pouvait être exécutée; ainsi l'on peut regarder α, dans l'équation $V = 0$, comme une fonction de x, y, z déterminée par l'équation $\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0$. Alors, si l'on prend la différentielle totale de la première équation (1), on aura

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz + \frac{\partial V}{\partial \alpha}d\alpha = 0;$$

mais le dernier terme de cette formule disparaît en vertu de la deuxième équation (1), et si l'on remplace dz par sa valeur $p\,dx + q\,dy$, on devra égaler séparément à zéro les coefficients des deux différentielles arbitraires dx et dy; on aura donc

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Maintenant on peut éliminer le paramètre α et la fonction $\varphi(\alpha)$ entre les équations (2) et la première des équations (1); on obtiendra ainsi une équation

$$(3) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

qui est aux dérivées partielles du premier ordre et qui peut avoir une forme quelconque. On verra plus loin que, si x, y, z représentent des coordonnées rectilignes, l'équation (3) exprime une propriété du plan tangent commune à toutes les surfaces que représentent les équations (1).

86. Exemple. — Soit

$$V = (x-\alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 + z^2 - R^2,$$

R étant une constante. On a ici

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2(x-\alpha), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2[y - \varphi(\alpha)], \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 2z;$$

les équations (2) du n° 85 sont donc

$$x - \alpha + pz = 0, \quad y - \varphi(\alpha) + qz = 0.$$

Si l'on en tire les valeurs de $x - \alpha$, $y - \varphi(\alpha)$ pour les substituer dans l'équation $V = 0$, il viendra

$$(1 + p^2 + q^2)z^2 = R^2$$

ou

$$z = \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

ce qui est l'équation aux dérivées partielles qu'il s'agissait de former.

87. Passons maintenant au cas général. Soient x_1, $x_2, \ldots, x_n$ les variables indépendantes, x la variable qui en dépend et que l'on nomme souvent la variable *principale*, faisons aussi

$$dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n.$$

Soient en outre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, $n-1$ paramètres variables, et

$$\alpha = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$$

une fonction arbitraire de ces paramètres; désignons enfin par

$$V = f(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$$

une fonction donnée des $n+1$ variables, des $n-1$ paramètres et de la fonction α.

Cela posé, considérons les n équations

$$(1) \qquad V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}} = 0,$$

qui déterminent $x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ en fonction de x_1, $x_2, \ldots, x_n$, et proposons-nous de déduire de ces équations une équation aux dérivées partielles indépendante de la fonction arbitraire α.

La marche à suivre est ici la même qu'au n° 85; la différentielle totale de V doit être nulle, et l'on a

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial V}{\partial \alpha_1}d\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}}d\alpha_{n-1} = 0,$$

les dérivées $\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}}$ étant prises en regardant α

qui entre dans V comme fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Comme les coefficients de $d\alpha_1, d\alpha_2, \ldots, d\alpha_{n-1}$ sont nuls, en vertu des équations (1), on a simplement

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}dx_n = 0.$$

Remplaçons dans cette équation dx par

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n,$$

les différentielles restantes $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ étant arbitraires, leurs coefficients devront être nuls séparément, et l'on aura

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0. \end{array}\right.$$

Maintenant, si l'on élimine $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ entre les n équations (2) et la première équation (1), on obtiendra une équation résultante

$$(3)\qquad F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

qui sera l'équation aux dérivées partielles demandée.

Du changement des variables indépendantes.

88. Le problème que nous nous proposons de résoudre peut être énoncé comme il suit :

Soit u une fonction de m variables $x, y, z, \ldots$; si l'on considère $x, y, z, \ldots$ comme fonctions de m nouvelles variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, u deviendra une fonction de ces mêmes variables. Cela posé, on demande d'ex-

primer les dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial z},\quad \ldots,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z},\quad \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

relatives à l'hypothèse de $x, y, z, \ldots$ *variables indépendantes, en fonction des dérivées partielles*

$$\frac{\partial u}{\partial \xi},\quad \frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial u}{\partial \zeta},\quad \ldots,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \zeta},\quad \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

relatives à l'hypothèse de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *variables indépendantes.*

Ici les anciennes variables $x, y, z, \ldots$ sont données en fonction des nouvelles $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, et réciproquement celles-ci sont des fonctions connues de $x, y, z, \ldots$. Regardant alors u comme fonction de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ et $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ comme fonctions de $x, y, z, \ldots$, la solution de la question proposée se déduira immédiatement de la règle de la différentiation des fonctions composées.

On a effectivement

$$(1)\qquad du = \frac{\partial u}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,d\eta + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\,d\zeta + \ldots,$$

puis

$$(2)\qquad \begin{cases} d\xi = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial \xi}{\partial z}\,dz + \ldots, \\ d\eta = \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial \eta}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial \eta}{\partial z}\,dz + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ étant données en fonction de x,

$y, z, \ldots$, les dérivées $\frac{\partial\xi}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial\eta}{\partial x}, \ldots$ sont elles-mêmes des fonctions connues de $x, y, z, \ldots$, mais on devra les exprimer en $\xi, \eta, \zeta, \ldots$. On substituera ces valeurs dans l'équation (1) et les coefficients de $dx, dy, dz\ldots$ seront les expressions demandées des dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \ldots,$$

en fonction des variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ et des dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad \ldots.$$

On procédera de la même manière à l'égard des dérivées d'ordres supérieurs; ainsi l'on a

$$d\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial \zeta} d\zeta + \ldots,$$

et, quand on aura substitué dans le second membre à $\frac{\partial u}{\partial x}$ la valeur précédemment obtenue, puis à $d\xi, d\eta, d\zeta, \ldots$ les valeurs tirées des formules (2), les coefficients de dx, $dy, dz, \ldots$ exprimeront les valeurs demandées des dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \quad \ldots.$$

Pareillement, en faisant la même substitution dans la formule

$$d\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{d\zeta} d\zeta + \ldots,$$

on obtiendra les expressions cherchées des dérivées

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \quad \ldots,$$

dont la première a déjà été calculée, et ainsi de suite.

La même méthode est évidemment applicable aux dérivées de tous les ordres.

89. Application. — *Les points de l'espace peuvent être représentés soit par trois coordonnées rectangulaires x, y, z, soit par trois coordonnées polaires r, θ, ψ qui sont liées aux premières par les formules*

$$(1)\qquad x = r\sin\theta\cos\psi,\quad y = r\sin\theta\sin\psi,\quad z = r\cos\theta,$$

ou

$$(2)\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x}.$$

Cela posé, la quantité u ayant été d'abord regardée comme fonction de x, y, z, on demande d'exprimer les dérivées de u du premier et du deuxième ordre, savoir :

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

en fonction des dérivées relatives aux nouvelles variables indépendantes r, θ, ψ.

On tire des formules (2)

$$dr = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$d\theta = \frac{z(x\,dx + y\,dy) - (x^2+y^2)\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sin\theta},$$

$$d\psi = \frac{(-y\,dx + x\,dy)\cos^2\psi}{x^2},$$

ou, à cause des formules (1),

$$(3)\quad \begin{cases} dr = \sin\theta\cos\psi\,dx + \sin\theta\sin\psi\,dy + \cos\theta\,dz,\\ d\theta = \dfrac{1}{r}\cos\theta\cos\psi\,dx + \dfrac{1}{r}\cos\theta\sin\psi\,dy - \dfrac{1}{r}\sin\theta\,dz,\\ d\psi = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\sin\psi}{\sin\theta}\,dx + \dfrac{1}{r}\dfrac{\cos\psi}{\sin\theta}\,dy. \end{cases}$$

Si l'on substitue ces valeurs de dr, $d\theta$, $d\psi$ dans la formule

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u}{\partial \psi} d\psi,$$

on aura

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \sin\theta \cos\psi + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos\theta \cos\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\sin\psi}{r \sin\theta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r} \sin\theta \sin\psi + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos\theta \sin\psi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\cos\psi}{r \sin\theta}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin\theta}{r}. \end{aligned} \right.$$

Il faut maintenant former les différentielles totales de

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z};$$

ou, ce qui revient au même, les dérivées partielles de ces quantités par rapport à r, θ, ψ. On trouve

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial r} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin\theta \cos\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos\theta \cos\psi}{r} - \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \frac{\sin\psi}{r \sin\theta} \\ &\quad - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos\theta \cos\psi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\sin\psi}{r^2 \sin\theta}, \\ \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial \theta} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \sin\theta \cos\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\cos\theta \cos\psi}{r} - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} \frac{\sin\psi}{r \sin\theta} \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial r} \cos\theta \cos\psi - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin\theta \cos\psi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\cos\theta \sin\psi}{r \sin^2\theta}, \\ \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial \psi} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \sin\theta \cos\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} \frac{\cos\theta \cos\psi}{r} - \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \frac{\sin\psi}{r \sin\theta} \\ &\quad - \frac{\partial u}{\partial r} \sin\theta \sin\psi - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos\theta \sin\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\cos\psi}{r \sin\theta}; \end{aligned} \right.$$

$$(6)\begin{cases}
\dfrac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial r} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\theta\sin\psi + \dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\dfrac{\cos\theta\sin\psi}{r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\psi}\dfrac{\cos\psi}{r\sin\theta} \\
\qquad - \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\cos\theta\sin\psi}{r^2} - \dfrac{\partial u}{\partial\psi}\dfrac{\cos\psi}{r^2\sin\theta}, \\
\dfrac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial\theta} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\sin\theta\sin\psi + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\dfrac{\cos\theta\sin\psi}{r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\psi}\dfrac{\cos\psi}{r\sin\theta} \\
\qquad + \dfrac{\partial u}{\partial r}\cos\theta\sin\psi - \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\sin\theta\sin\psi}{r} - \dfrac{\partial u}{\partial\psi}\dfrac{\cos\theta\cos\psi}{r\sin^2\theta}, \\
\dfrac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial\psi} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\psi}\sin\theta\sin\psi + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\psi}\dfrac{\cos\theta\sin\psi}{r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\dfrac{\cos\psi}{r\sin\theta} \\
\qquad + \dfrac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\cos\psi + \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \dfrac{\partial u}{\partial\psi}\dfrac{\sin\psi}{r\sin\theta};
\end{cases}$$

$$(7)\begin{cases}
\dfrac{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}{\partial r} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos\theta - \dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\dfrac{\sin\theta}{r} + \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\sin\theta}{r^2}, \\
\dfrac{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\theta} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\cos\theta - \dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\dfrac{\sin\theta}{r} - \dfrac{\partial u}{\partial r}\sin\theta - \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\cos\theta}{r}, \\
\dfrac{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\psi} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\psi}\cos\theta - \dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\psi}\dfrac{\sin\theta}{r}.
\end{cases}$$

Si l'on ajoute les équations (5) après les avoir multipliées respectivement par les équations (3), on aura la différentielle totale de $\frac{\partial u}{\partial x}$, et les coefficients de dx, dy, dz dans cette expression seront les valeurs demandées de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z};$$

on obtiendra de la même manière les autres dérivées par-

tielles en ajoutant successivement les équations (6) ou (7), après les avoir préalablement multipliées par les équations (3). On trouve ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta\cos^2\psi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos^2\psi}{r} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r}\\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi}{r^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\frac{\sin^2\psi}{r^2\sin^2\theta}\\
&+ \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi + \sin^2\psi}{r} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(\sin^2\psi - 2\sin^2\theta\cos^2\psi)\cos\theta}{r^2\sin\theta} + 2\frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{r}\\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{(\cos^2\psi - \sin^2\psi)\cos\theta}{r^2\sin\theta} - \frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta}\\
&- \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(1 + 2\sin^2\theta)\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin\theta} - \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{r^2\sin^2\theta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta\cos\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\psi}{r} - \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r\sin\theta}\\
&- \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\sin\psi}{r^2}\\
&- \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\psi}{r^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta\sin^2\psi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\psi}{r} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r}\\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta\sin^2\psi}{r^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\frac{\cos^2\psi}{r^2\sin^2\theta}\\
&+ \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta\sin^2\psi + \cos^2\psi}{r} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(\cos^2\psi - 2\sin^2\theta\sin^2\psi)\cos\theta}{r^2\sin\theta} - 2\frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta\sin\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\psi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r\sin\theta}$$
$$- \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\cos\psi}{r^2}$$
$$- \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\psi}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2}$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r} + 2\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}.$$

90. On peut souvent abréger, en employant des artifices convenables, les calculs nécessaires pour exécuter un changement de variables ; nous croyons utile de donner une idée de ces simplifications en traitant ici une question qui se rencontre dans diverses théories mathématiques. Nous nous proposons de transformer l'expression

$$(1) \qquad S = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

en substituant aux coordonnées rectangulaires x, y, z les coordonnées polaires r, θ, ψ. On obtient immédiatement la solution de cette question en faisant usage des formules du numéro précédent, mais nous voulons exécuter la transformation sans recourir à ces formules.

A cet effet, nous substituerons d'abord à x et y les deux variables ρ, ψ telles que

$$x = \rho\cos\psi, \quad y = \rho\sin\psi,$$

ou

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x}.$$

On tire de là

$$d\rho = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\psi\,dx + \sin\psi\,dy,$$

$$d\psi = \frac{(x\,dy - y\,dx)\cos^2\psi}{x^2} = -\frac{\sin\psi}{\rho}dx + \frac{\cos\psi}{\rho}dy.$$

Ces équations déterminent $\frac{\partial\rho}{\partial x}$, $\frac{\partial\rho}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$; on en conclut

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial\rho}\cos\psi - \dfrac{\partial u}{\partial\psi}\dfrac{\sin\psi}{\rho}, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial\rho}\sin\psi + \dfrac{\partial u}{\partial\psi}\dfrac{\cos\psi}{\rho}. \end{cases}$$

En ajoutant les équations (2), après avoir multiplié la seconde par $\sqrt{-1}$, il vient

$$(3)\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial u}{\partial y} = (\cos\psi + \sqrt{-1}\sin\psi)\left(\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{\sqrt{-1}}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\psi}\right).$$

Désignons par v la valeur de chacun des membres de la formule (3); comme cette formule subsiste quelle que soit la fonction u et quel que soit le signe qu'on donne au radical $\sqrt{-1}$, on aura, en remplaçant u par v et en mettant $-\sqrt{-1}$ au lieu de $\sqrt{-1}$,

$$(4)\quad \frac{\partial v}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial v}{\partial y} = (\cos\psi - \sqrt{-1}\sin\psi)\left(\frac{\partial v}{\partial\rho} - \frac{\sqrt{-1}}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\psi}\right).$$

De l'égalité

$$v = \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial u}{\partial y}$$

on conclut

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

et l'égalité

$$v = (\cos\psi + \sqrt{-1}\sin\psi)\left(\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{\sqrt{-1}}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)$$

donne ensuite

$$(\cos\psi - \sqrt{-1}\sin\psi)\left(\frac{\partial v}{\partial\rho} - \frac{\sqrt{-1}}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\psi}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}.$$

Ainsi l'on a

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho};$$

et, par suite,

$$(6)\qquad S = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}.$$

Pour achever la solution, il reste à substituer aux variables ρ et z les variables nouvelles r et θ, liées aux précédentes par les équations

$$z = r\cos\theta, \quad \rho = r\sin\theta.$$

Or, si l'on remplace, dans la formule (5), x, y, ρ, ψ par z, ρ, r, θ respectivement, il viendra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r};$$

en même temps la seconde des formules (2) donnera par le même changement

$$\frac{\partial u}{\partial\rho} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r};$$

on aura donc, en substituant ces valeurs dans la formule (6) et en remplaçant aussi ρ par $r\sin\theta$,

$$S = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

Les deux premiers termes de cette expression multipliés par r donnent la dérivée $\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}$; les deux derniers termes

multipliés par $r^2 \sin\theta$ donnent la dérivée $\dfrac{\partial\left(\sin\theta \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}$; on a donc

$$r^2 S = r\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}.$$

Il est souvent avantageux de prendre

$$\cos\theta = \mu$$

pour variable au lieu de θ; alors on a

$$\frac{\partial u}{\partial\theta} = \frac{\partial u}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\theta} = -\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\mu}, \quad \text{d'où} \quad \sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} = -(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu},$$

puis

$$\frac{\partial\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} = -\frac{\partial\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)}{\partial\mu}\sin\theta = \sin\theta\frac{\partial(1-\mu^2)\dfrac{\partial u}{\partial\mu}}{\partial\mu};$$

et l'on obtient finalement l'expression suivante de S en fonction des variables indépendantes r, μ, ψ :

$$r^2 S = r\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + \frac{\partial(1-\mu^2)\dfrac{\partial u}{\partial\mu}}{\partial\mu}.$$

Du changement de toutes les variables.

91. Lorsque l'on veut changer la variable principale en même temps que les variables indépendantes, la marche à suivre est la même. Supposons que l'on ait introduit dans un calcul une variable u fonction de m variables indépendantes $x, y, z, \ldots$, et qu'on veuille adopter une autre fonction v de m nouvelles variables indépendantes ξ, η,

ζ, ... Il s'agit d'exprimer les dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\quad \ldots,$$

en fonction des dérivées partielles

$$\frac{\partial v}{\partial \xi},\quad \frac{\partial v}{\partial \eta},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta},\quad \ldots.$$

Dans cette question, les $m+1$ variables de l'un des systèmes que l'on considère sont données en fonction des $m+1$ variables de l'autre système. Ainsi v, ξ, η, ζ, ... sont des fonctions données de u, x, y, z, ..., et leurs différentielles totales seront de la forme

$$\begin{aligned} dv &= U_0\,du + U_1\,dx + U_2\,dy + \ldots,\\ d\xi &= X_0\,du + X_1\,dx + X_2\,dy + \ldots,\\ d\eta &= Y_0\,du + Y_1\,dx + Y_2\,dy + \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

U_0, U_1, ..., X_0, X_1, ... étant des fonctions connues des variables u, x, y, z, ... Mais u étant une fonction de x, y, z, ..., on a

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \ldots,$$

et, par conséquent,

$$(1)\quad \begin{cases} dv = \left(U_1 + U_0\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(U_2 + U_0\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \ldots,\\ d\xi = \left(X_1 + X_0\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(X_2 + X_0\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \ldots,\\ d\eta = \left(Y_1 + Y_0\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(Y_2 + Y_0\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si maintenant on porte ces valeurs dans la formule

$$(2)\qquad dv = \frac{\partial v}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial v}{\partial \eta}\,d\eta + \frac{\partial v}{\partial \zeta}\,d\zeta + \ldots,$$

on obtiendra une équation qui devra subsister, quelles que soient dx, dy, dz, ..., et qui se décomposera en m autres, savoir :

$$(3)\quad \begin{cases} U_1+U_0\dfrac{\partial u}{\partial x}=\left(X_1+X_0\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\dfrac{\partial v}{\partial \xi}+\left(Y_1+Y_0\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\dfrac{\partial v}{\partial \eta}+\ldots,\\ U_2+U_0\dfrac{\partial u}{\partial y}=\left(X_2+X_0\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\dfrac{\partial v}{\partial \xi}+\left(Y_2+Y_0\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\dfrac{\partial v}{\partial \eta}+\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On peut exprimer U_0, U_1, ..., X_0, ... en fonction des variables v, ξ, η, ζ, ..., et les formules (3) donneront alors les valeurs demandées de $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, ...

Pour passer aux dérivées du deuxième ordre, il suffira de différentier les équations (3). Considérons, par exemple, la première équation du système (3), différentions-la totalement, remplaçons ensuite $d\dfrac{\partial u}{\partial x}$ par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dy+\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}dz+\ldots,$$

puis

$$dv,\quad d\frac{\partial v}{\partial \xi},\quad d\frac{\partial v}{\partial \eta},\quad \ldots$$

par leurs valeurs respectives

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial \xi}d\xi+\dfrac{\partial v}{\partial \eta}d\eta+\ldots;\\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}d\xi+\dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}d\eta+\ldots,\\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}d\xi+\dfrac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}d\eta+\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

mettons enfin pour $d\xi$, $d\eta$, ... les valeurs tirées des

formules (1). L'équation ainsi obtenue aura lieu quelles que soient les différentielles restantes dx, dy, dz, ...; par conséquent elle se décomposera en m autres qui feront connaître les expressions des m dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \quad \ldots.$$

On calculera de la même manière les valeurs des autres dérivées du deuxième ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \quad \ldots.$$

Les dérivées des ordres suivants s'obtiendront évidemment en suivant la même marche.

Enfin il est aisé de s'assurer que la méthode précédente est encore applicable dans le cas d'un nombre quelconque de variables dépendantes, quel que soit le nombre des variables indépendantes.

Transformation de Legendre.

92. Legendre a fait usage dans certaines questions d'une transformation qui offre souvent des avantages et que nous indiquerons ici, en nous bornant au cas de deux variables indépendantes.

Soit z une fonction des variables indépendantes x, y; désignons par

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{1}$$

la différentielle de z, et par

$$\left\{\begin{aligned} dp &= r\,dx + s\,dy, \\ dq &= s\,dx + t\,dy \end{aligned}\right. \tag{2}$$

les différentielles de p et q.

Si l'on pose

$$(3) \qquad u = px + qy - z,$$

on aura

$$du = (p\,dx + q\,dy - dz) + x\,dp + y\,dq,$$

ou, à cause de la formule (1),

$$(4) \qquad du = x\,dp + y\,dq.$$

En outre, si l'on résout les formules (2) par rapport à dx et dy, il viendra

$$(5) \qquad \begin{cases} dx = \dfrac{t}{rt - s^2}\,dp + \dfrac{-s}{rt - s^2}\,dq, \\[2mm] dy = \dfrac{-s}{rt - s^2}\,dp + \dfrac{r}{rt - s^2}\,dq. \end{cases}$$

La transformation de Legendre consiste à prendre p, q, u pour variables, au lieu de x, y, z, et à choisir p et q pour variables indépendantes. Alors la formule (4) montre que x et y sont les dérivées partielles de u par rapport à p et q respectivement; ainsi l'on a

$$(6) \qquad \frac{\partial u}{\partial p} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = y;$$

ensuite les formules (5) montrent que $\dfrac{t}{rt - s^2}$, $\dfrac{-s}{rt - s^2}$, $\dfrac{r}{rt - s^2}$ sont les valeurs des dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial p}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial p}, \quad \frac{\partial y}{\partial q};$$

on a donc

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q} = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \frac{r}{rt - s^2},$$

d'où l'on conclut

$$(8)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2 = \frac{1}{rt - s^2}.$$

Les formules (7) et (8) font connaître les dérivées r, s, t en fonction des dérivées de u relatives à p et q.

93. Si l'on veut prendre x et p pour les variables indépendantes, les différentielles totales de y et de q tirées des formules (2) seront

$$dy = \frac{1}{s}\,dp - \frac{r}{s}\,dx,$$

$$dq = \frac{t}{s}\,dp - \frac{rt - s^2}{s}\,dx;$$

les formules (1) et (4) feront connaître ensuite les différentielles totales dz et du. La dernière des formules précédentes nous donne

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{rt - s^2}{s}$$

dans l'hypothèse de p et x variables indépendantes; donc, si la différence $rt - s^2$ est identiquement nulle, on aura

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Cela montre que q ne dépend pas de x et qu'ainsi cette quantité est une fonction de la seule variable p. Dans ce cas les quantités p et q ne peuvent pas être prises pour variables indépendantes; aussi les formules de la transformation de Legendre deviennent-elles illusoires.

CHAPITRE V.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES.

Notions préliminaires sur les séries.

94. On nomme *série* une suite illimitée de quantités qui se succèdent suivant une loi quelconque. Nous ne nous occuperons ici que des séries dans lesquelles tous les termes sont des quantités réelles.

Une série

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1},\ \ldots$$

est dite *convergente* lorsque la somme

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

des n premiers termes tend vers une limite finie et déterminée S, à mesure que le nombre n augmente indéfiniment. La quantité S est dite la *somme* de la série; la différence $S - S_n$ est le *reste* de la même série bornée aux n premiers termes; en désignant par R_n ce reste, on a

$$S = S_n + R_n.$$

Une série est *divergente* lorsque la somme des n premiers termes croît au delà de toute limite, à mesure que n augmente indéfiniment, ou bien lorsque cette somme ne tend vers aucune limite déterminée.

Ainsi la progression géométrique

$$a,\ ax,\ ax^2,\ ax^3,\ \ldots$$

est une série convergente, toutes les fois que la valeur

absolue de la raison x est inférieure à l'unité, car la somme des n premiers termes est

$$S_n = \frac{a}{1-x} - \frac{a}{1-x} x^n,$$

et cette somme tend vers la limite

$$S = \frac{a}{1-x}$$

quand n tend vers l'infini. Mais la même progression est une série divergente, lorsque la valeur absolue de x est supérieure à 1; car, dans ce cas, la somme S_n croît au delà de toute limite. Elle est encore divergente, pour la même raison, lorsque $x = +1$; enfin, dans le cas de $x = -1$, S_n ne tend pas vers une limite déterminée et la série ne doit pas être regardée comme convergente.

95. Théorème I. — *Si la série*

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, \ldots$$

est convergente, la somme

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}$$

tend vers zéro, quel que soit p, quand n augmente indéfiniment.

En effet, désignons par S la somme de la série ou la limite vers laquelle tend la somme

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$$

de ses n premiers termes. La différence

$$(1) \qquad S - S_n$$

tendra vers zéro quand n tendra vers l'infini, et la même chose aura lieu pour chacune des p différences

$$(2) \qquad S - S_{n+1}, \quad S - S_{n+2}, \quad \ldots, \quad S - S_{n+p}.$$

Si l'on retranche ces différences (2) de la différence (1), on obtiendra les résultats

$$S_{n+1} - S_n, \quad S_{n+2} - S_n, \quad \ldots, \quad S_{n+p} - S_n,$$

qui s'annuleront aussi pour $n = \infty$. Or on a

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= u_n, \\ S_{n+2} - S_n &= u_n + u_{n+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ S_{n+p} - S_n &= u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}; \end{aligned}$$

donc : 1° *les termes d'une série convergente décroissent indéfiniment, de manière à avoir zéro pour limite;* 2° *la somme de tant de termes que l'on voudra pris à partir du* $n^{ième}$ *tend vers zéro quand* n *augmente indéfiniment.*

96. Théorème II. — *Réciproquement, la série*

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \; \ldots, \; u_{n-1}, \; \ldots$$

est convergente lorsque la somme

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}$$

tend vers zéro, quel que soit p, *quand* n *augmente indéfiniment.*

En effet, désignons par ε une quantité positive aussi petite que l'on voudra, et par S_n la somme des n premiers termes de la série. Comme la différence

$$S_{n+p} - S_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}$$

tend vers zéro, quel que soit p, par hypothèse, quand n tend vers l'infini, on peut donner à n une valeur *déterminée* assez grande pour que la différence dont il s'agit soit comprise, quel que soit p, entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$. On aura donc

$$S_n - \varepsilon < S_{n+p} < S_n + \varepsilon.$$

Cela posé, le nombre n restant invariable, faisons tendre p vers l'infini, la somme S_{n+p} restera toujours comprise entre deux quantités déterminées $S_n - \varepsilon$, $S_n + \varepsilon$ dont la différence 2ε est aussi petite que l'on veut; d'où il suit évidemment que S_{n+p} tend vers une limite déterminée quand p ou $n+p$ augmente indéfiniment.

Cette démonstration acquiert plus de clarté quand on lui donne une forme géométrique. Soit O un point fixe d'un axe Ox. Prenons sur Ox à partir de O une longueur $ON = S_n$, puis faisons $AN = NA' = \varepsilon$; prenons aussi $OP = S_{n+p}$, le point P tombera entre A et A'. Ainsi

O A N P A' x

la somme S_{n+p} des $n+p$ premiers termes de notre série peut être représentée par une abscisse dont l'extrémité tombe constamment entre deux points donnés A et A'; elle est donc finie, mais de plus elle est déterminée, car la distance AA' peut devenir moindre que toute longueur donnée.

Corollaire I. — *Une série $u_0, u_1, u_2, \ldots$ est convergente lorsque les valeurs absolues de ses termes forment une série convergente* $U_0, U_1, U_2, \ldots$.

En effet, la série $U_0, U_1, U_2, \ldots$ étant convergente, la somme $U_n + U_{n+1} + \ldots + U_{n+p-1}$ tend vers zéro, quel que soit p, quand n tend vers l'infini; donc la somme $u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}$ tend aussi vers zéro, car sa valeur numérique ne peut être supérieure à la somme précédente. Il s'ensuit que la série proposée est convergente.

Corollaire II. — *Lorsqu'à partir d'un certain rang les termes d'une série sont alternativement positifs et négatifs, il faut et il suffit, pour la convergence de la*

série, que les valeurs absolues des termes décroissent indéfiniment.

Le décroissement indéfini des termes est, comme on l'a vu, une condition indispensable pour la convergence d'une série; dans le cas que nous examinons, cette condition est suffisante.

En effet, soit la série

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1},\ \ldots,$$

et désignons généralement par U_n la valeur absolue de u_n, on aura, si n est suffisamment grand,

$$\pm(u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}) = U_n - U_{n+1} + \ldots \pm U_{n+p-1}.$$

Le second membre de cette formule peut être écrit des deux manières suivantes :

$$(U_n - U_{n+1}) + (U_{n+1} - U_{n+2}) + \ldots,$$
$$U_n - (U_{n+1} - U_{n+2}) - (U_{n+3} - U_{n+4}) - \ldots;$$

on voit que la valeur de

$$\pm(u_n + u_{n-1} + \ldots + u_{n+p-1})$$

est comprise entre zéro et U_n; donc elle tend vers zéro, quel que soit p, quand n augmente indéfiniment, puisque l'on a, par hypothèse, $\lim U_n = 0$. Donc la série est convergente.

97. On ne possède point de critérium pour décider en général si une série donnée est convergente ou divergente. Il faut, dans chaque cas, chercher à comparer la série que l'on doit considérer à d'autres séries dont la convergence ou la divergence est établie, et à cet égard nous pouvons démontrer une proposition de laquelle nous tirerons plusieurs conséquences importantes. Cette proposition se rapporte aux séries dont tous les termes sont

positifs, mais les règles qui en découlent sont applicables à toutes les séries, en faisant usage du corollaire I du nº 96.

THÉORÈME III. — *Si la première des deux séries*

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{n-1},\ \ldots,$$
$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1},\ \ldots,$$

dont tous les termes sont positifs à partir d'un certain rang, est convergente et que l'on ait constamment

$$u_n < v_n$$

pour toutes les valeurs de n qui surpassent un nombre donné, la deuxième série sera également convergente.

Pareillement, si la première série est divergente et que l'on ait constamment

$$u_n > v_n,$$

pour toutes les valeurs de n qui surpassent un nombre donné, la deuxième série sera également divergente.

Dans le premier cas, la somme

$$v_n + v_{n+1} + \ldots + v_{n+p-1}$$

tend vers zéro, quel que soit p, quand n tend vers l'infini; donc la somme

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1},$$

qui est formée de parties respectivement moindres, tend aussi vers zéro, et par conséquent la deuxième série est convergente.

Dans le deuxième cas, la série $u_0, u_1, u_2, \ldots$ ne saurait être convergente, car autrement la série $v_0, v_1, v_2, \ldots$ serait aussi convergente, d'après ce qu'on vient de dire, ce qui est contraire à l'hypothèse.

COROLLAIRE I. — *La série u_0, u_1, u_2, ..., dont tous les*

termes sont positifs, est convergente si, pour toutes les valeurs de n supérieures à une certaine limite, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$, *k étant une quantité inférieure à l'unité.*

En effet on a, par hypothèse, pour les valeurs de n suffisamment grandes,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < k, \quad \ldots, \quad \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} < k;$$

d'où, par la multiplication,

$$\frac{u_{n+p}}{u_n} < k^p, \quad \text{ou} \quad u_{n+p} < k^p u_n;$$

il résulte de là que les termes de la série proposée

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \; \ldots, \; u_n, \; u_{n+1}, \; u_{n+2}, \; \ldots$$

sont, à partir du $n^{\text{ième}}$ rang, inférieurs aux termes correspondants de la série

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \; \ldots, \; u_n, \; ku_n, \; k^2 u_n, \; \ldots.$$

Or cette dernière est convergente et elle a pour somme $S_n + \frac{u_n}{1-k}$; donc la série proposée est elle-même convergente.

Corollaire II. — *La série* $u_0, u_1, u_2, \ldots$, *dont tous les termes sont positifs, est convergente si le rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *tend vers une limite déterminée* α *inférieure à* 1, *quand n tend vers l'infini.*

En effet, puisque le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers la limite α, la différence $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \alpha$ restera inférieure à tout nombre donné pour les valeurs de n supérieures à une certaine

limite; donc on peut assigner une quantité k comprise entre α et 1, et telle que l'on ait constamment

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k;$$

on est alors dans les conditions du corollaire I, et par conséquent la série proposée est convergente.

Remarque. — Lorsque la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieure à 1, la série est toujours divergente, puisque alors les termes ne décroissent pas indéfiniment; mais quand on a $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, la série peut être convergente: la proposition précédente n'apprend rien à cet égard.

Corollaire III. — *La série* $u_0, u_1, u_2, \ldots,$ *dont tous les termes sont positifs, est convergente si pour les valeurs de* n *supérieures à une certaine limite on a* $\sqrt[n]{u_n} < k$, k *étant une quantité inférieure à* 1.

En effet, on a

$$u_n < k^n$$

pour les valeurs de n suffisamment grandes; donc les termes de la série sont, à partir d'un certain rang, inférieurs aux termes de même rang de la progression

$$1, \ k, \ k^2, \ \ldots;$$

celle-ci étant une série convergente, la proposée est elle-même convergente.

Corollaire IV. — *La série* $u_0, u_1, u_2, \ldots,$ *dont tous les termes sont positifs, est convergente si* $\sqrt[n]{u_n}$ *tend vers une limite déterminée* α *inférieure à* 1.

Car on peut assigner une quantité k comprise entre α et 1, et telle que l'on ait

$$\sqrt[n]{u_n} < k$$

pour toutes les valeurs de n supérieures à une certaine limite.

98. Exemple I. — Considérons la série

$$\frac{1}{1^{1+\rho}} + \frac{1}{2^{1+\rho}} + \frac{1}{3^{1+\rho}} + \ldots + \frac{1}{n^{1+\rho}} + \ldots,$$

où ρ est un nombre donné. Le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+\rho}$$

a pour limite l'unité, et le corollaire II du numéro précédent est insuffisant pour le cas actuel. Le corollaire IV ne donne lui-même aucune lumière; car on a

$$\sqrt[n]{u_n} = n^{-\frac{1+\rho}{n}}, \quad \log \sqrt[n]{u_n} = -(1+\rho)\frac{\log n}{n};$$

la fraction $\frac{\log n}{n}$ tend vers zéro, comme on le constate au moyen d'une règle qui sera donnée plus loin, et par conséquent $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers l'unité. Mais le théorème III (n° 97) convenablement appliqué va nous permettre de reconnaître dans quels cas la série proposée est convergente.

Posons

$$(1) \quad \begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{1^{1+\rho}}, \\ u_1 = \dfrac{1}{2^{1+\rho}} + \dfrac{1}{3^{1+\rho}}, \\ u_2 = \dfrac{1}{4^{1+\rho}} + \dfrac{1}{5^{1+\rho}} + \dfrac{1}{6^{1+\rho}} + \dfrac{1}{7^{1+\rho}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m = \dfrac{1}{(2^m)^{1+\rho}} + \dfrac{1}{(2^m+1)^{1+\rho}} + \ldots + \dfrac{1}{(2^{m+1}-1)^{1+\rho}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

on aura évidemment

$$u_1 < 2 \times \frac{1}{2^{1+\rho}} \quad \text{ou} \quad < \frac{1}{2^\rho},$$

$$u_2 < 4 \times \frac{1}{4^{1+\rho}} \quad \text{ou} \quad < \frac{1}{(2^\rho)^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$u_m < 2^m \times \frac{1}{(2^m)^{1+\rho}} \quad \text{ou} \quad < \frac{1}{(2^\rho)^m},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

par conséquent, dans la série

$$u_0, \ u_1, \ u_2, \ \ldots, \ u_m, \ \ldots,$$

les termes sont moindres que ceux qui occupent respectivement les mêmes rangs dans la série

$$1, \quad \frac{1}{2^\rho}, \quad \frac{1}{(2^\rho)^2}, \quad \frac{1}{(2^\rho)^m}, \quad \ldots.$$

Or cette dernière est convergente quand ρ est positif : donc la proposée est elle-même convergente dans la même hypothèse.

Posons, au lieu des formules (1),

$$(2) \left\{ \begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{1^{1+\rho}}, \\ u_1 &= \frac{1}{2^{1+\rho}}, \\ u_2 &= \frac{1}{3^{1+\rho}} + \frac{1}{4^{1+\rho}}, \\ u_3 &= \frac{1}{5^{1+\rho}} + \frac{1}{6^{1+\rho}} + \frac{1}{7^{1+\rho}} + \frac{1}{8^{1+\rho}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ u_m &= \frac{1}{(2^{m-1}-1)^{1+\rho}} + \frac{1}{(2^{m-1}+2)^{1+\rho}} + \ldots + \frac{1}{(2^m)^{1+\rho}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \right.$$

on aura

$$u_2 > 2 \times \frac{1}{4^{1+\rho}} \quad \text{ou} \quad > \frac{1}{2}\frac{1}{(2^\rho)^2},$$

$$u_3 > 4 \times \frac{1}{8^{1+\rho}} \quad \text{ou} \quad > \frac{1}{2}\frac{1}{(2^\rho)^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$u_m > 2^{m-1} \times \frac{1}{(2^m)^{1+\rho}} \quad \text{ou} \quad > \frac{1}{2}\frac{1}{(2^\rho)^m},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

donc, dans notre série

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m,\ \ldots,$$

les termes sont supérieurs à ceux qui occupent respectivement les mêmes rangs dans la série

$$1,\quad \frac{1}{2}\frac{1}{2^\rho},\quad \frac{1}{2}\frac{1}{(2^\rho)^2},\quad \frac{1}{2}\frac{1}{(2^\rho)^3},\quad \cdots.$$

Or celle-ci est divergente quand ρ est nul ou négatif; donc la série proposée est elle-même divergente dans cette hypothèse.

99. Exemple II. — Les séries

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

sont convergentes quel que soit x; elles restent même convergentes quand on réduit chaque terme à sa valeur absolue. Effectivement, le rapport d'un terme au précé-

dent a pour valeur, dans ces séries,

$$\frac{x}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{\pm x^2}{n(n+1)},$$

et il tend vers la limite zéro quand n tend vers l'infini.

100. Exemple III. — La série

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

est convergente tant que x est compris entre -1 et $+1$, car le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a ici pour valeur

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)},$$

et sa limite, pour $n = \infty$, est $-x$. Il est évident que la série est divergente, quand la valeur absolue de x est supérieure à 1. Pour $x = +1$, la série est convergente parce que les termes décroissent indéfiniment et sont alternativement positifs et négatifs (n° 96, corollaire II); mais elle est divergente pour $x = -1$ (n° 98).

101. Parmi les séries convergentes, il faut distinguer celles dont la convergence est *due uniquement au décroissement des termes* et celles dont la convergence ne résulte que de la *succession des signes;* les séries de la première espèce restent convergentes quand on remplace chaque terme par sa valeur absolue, tandis que les autres deviennent divergentes quand on prend tous leurs termes avec le même signe. Il importe de remarquer que la somme d'une série convergente de la deuxième espèce dépend de l'ordre dans lequel les termes sont écrits.

Considérons, par exemple, la série

$$(1) \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots,$$

qui est convergente (n° 96) et qui devient divergente quand on prend tous les termes avec le signe + (n° 98). Formons une deuxième série avec les mêmes termes en reculant les termes négatifs de telle manière que chacun d'eux soit précédé et suivi de deux termes positifs ; notre deuxième série sera

$$(2) \qquad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots;$$

je dis qu'elle est convergente et qu'elle n'a pas la même somme que la première.

D'abord la série (2) est convergente, car on peut réunir en un seul les trois termes consécutifs

$$\frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{2n},$$

dont la somme

$$\frac{8n-3}{32n^3 - 32n^2 + 6n}$$

est inférieure à $\frac{1}{n^2}$ dès que n est plus grand que 1 ; notre série étant écrite de cette manière, ses termes finissent par rester inférieurs à ceux de la série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots,$$

qui est convergente (n° 98); par suite elle est elle-même convergente.

Maintenant arrêtons les séries (1) et (2) au terme $-\frac{1}{2n}$ et désignons par S_n, S'_n les sommes des termes conservés, on aura

$$S'_n - S_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \ldots + \frac{1}{4n-1};$$

les $n-1$ termes de cette formule forment une suite décroissante; on a donc

$$S'_n - S_n > \frac{n-1}{4n-1}, \quad S'_n - S_n < \frac{n-1}{2n+1}.$$

Quand n augmente indéfiniment, les fractions $\frac{n-1}{4n-1}$, $\frac{n-1}{2n+1}$ ou $\frac{1-\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n}}$, $\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}$ tendent vers les limites respectives $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$; si donc on désigne par S et S′ les sommes des séries (1) et (2), on aura

$$S' - S > \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad S' - S < \frac{1}{2};$$

les séries (1) et (2) n'ont donc pas la même limite.

102. Il peut même arriver que deux séries formées des mêmes termes pris avec les mêmes signes soient l'une convergente, l'autre divergente. Les deux séries

$$(1) \qquad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \ldots,$$

$$(2) \qquad 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

en offrent un exemple; ici les valeurs absolues des termes sont les racines carrées des valeurs absolues des termes correspondants des séries (1) et (2) du numéro précédent; les signes sont respectivement les mêmes que dans ces dernières. La série (1) est convergente (n° **96**) à cause de l'alternance des signes + et —; je dis que la série (2) est divergente. En effet, soient S_n, S'_n les sommes obtenues

en arrêtant les deux séries au terme $-\frac{1}{\sqrt{2n}}$, on aura

$$S'_n - S_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n-1}};$$

le dernier des $n-1$ termes de cette formule est plus petit que les autres. On a donc

$$S'_n - S_n > \frac{n-1}{\sqrt{4n-1}} \quad \text{ou} \quad > \sqrt{n-1}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n}}};$$

le facteur $\sqrt{\frac{1-\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n}}}$ a pour limite $\frac{1}{2}$ et le facteur $\sqrt{n-1}$ devient infini pour $n=\infty$; donc $S'_n - S_n$ croît au delà de toute limite, et il en est de même de S'_n.

103. Les détails dans lesquels nous venons d'entrer étaient nécessaires pour bien apprécier l'importance du théorème suivant qui se rapporte aux séries de la première espèce :

Théorème IV. — *Lorsqu'une série est convergente et qu'elle reste convergente quand on y remplace chaque terme par sa valeur absolue, on peut intervertir d'une manière quelconque l'ordre des termes sans altérer la convergence ni la somme de la série.*

Soit la série convergente

$$(1) \qquad u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1},\ \ldots,$$

et supposons que les valeurs absolues de ses termes forment aussi une série convergente

$$(2) \qquad U_0,\ U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_{n-1},\ \ldots;$$

je dis que la série

(3) $$u_\alpha,\ u_\beta,\ u_\gamma,\ \ldots,\ u_\omega,\ \ldots,$$

dans laquelle les indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ se succèdent suivant une loi quelconque, est convergente et a la même somme que la série (1).

En effet, prenons dans la série (3) un nombre de termes assez grand pour que les n premiers termes de la série (1) s'y trouvent compris, on aura

(4) $$u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots + u_\omega = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} \pm \mathrm{R},$$

en représentant par $\pm \mathrm{R}$ la somme de ceux des termes $u_\alpha, u_\beta, \ldots, u_\omega$ dont l'indice est supérieur à $n-1$. Si u_p, $u_q, u_r, \ldots, u_s$ désignent ces derniers termes, on aura

$$\pm \mathrm{R} = u_p + u_q + u_r + \ldots + u_s,$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{R} < \mathrm{U}_p + \mathrm{U}_q + \mathrm{U}_r + \ldots + \mathrm{U}_s.$$

Soit R_n le reste de la série convergente (2) arrêtée au terme U_{n-1}, c'est-à-dire la somme de la série

$$\mathrm{U}_n + \mathrm{U}_{n+1} + \mathrm{U}_{n+2} + \mathrm{U}_{n+3} + \ldots,$$

comme les indices $p, q, r, \ldots, s$ sont tous supérieurs à $n-1$, on aura

$$\mathrm{R} < \mathrm{R}_n \quad \text{ou} \quad \mathrm{R} = \theta \mathrm{R}_n.$$

θ étant une quantité comprise entre 0 et 1. Par conséquent, si S_n désigne la somme des n premiers termes de la série (1), la formule (4) deviendra

$$u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots + u_\omega = \mathrm{S}_n \pm \theta \mathrm{R}_n;$$

quand le nombre n tend vers l'infini, R_n tend vers zéro, par hypothèse, puisque la série (2) est convergente; d'ail-

leurs S_n a pour limite la somme S de la série (1); donc la somme

$$u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots + u_\omega$$

tend aussi vers la limite S quand le nombre des termes augmente indéfiniment.

104. Multiplication des séries. — Théorème V. — *Soient*

(1) $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, \ldots,$

(2) $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, \ldots$

deux séries convergentes ayant respectivement pour sommes S *et* S′ *et qui restent convergentes quand on y remplace les termes par leurs valeurs absolues, la série*

(3) $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, \ldots,$

dont le terme général w_m *a pour valeur*

$$w_m = u_0 v_m + u_1 v_{m-1} + u_2 v_{m-2} + \ldots + u_{m-1} v_1 + u_m v_0,$$

est convergente et elle a pour somme le produit SS′ *des sommes des premières séries.*

Désignons par S_n, S'_n, S''_n les sommes obtenues en ajoutant les n premiers termes dans les séries (1), (2), (3); on aura

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1},$$
$$S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1},$$

et

$$S''_n = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_{n-1},$$

ou

$$S''_n = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \ldots + (u_0 v_{n-1} + u_1 v_{n-2} + \ldots + u_{n-1} v_0).$$

Nous supposerons d'abord que les termes des séries (1) et (2) soient tous positifs. Alors le produit $S_n S'_n$ contien-

dra tous les termes de S''_n avec d'autres termes positifs; on a donc

$$S_n S'_n > S''_n;$$

en outre, si l'on désigne par m le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$, savoir $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$, il est évident que tous les termes du produit $S_m S'_m$ feront partie de ceux qui composent S''_n; on aura donc

$$S_m S'_m < S''_n.$$

Maintenant, si l'on fait tendre n vers l'infini, m tendra aussi vers l'infini. Les quantités S_n et S_m tendront vers la limite S, S'_n et S'_m vers la limite S'; donc S''_n est comprise entre deux quantités qui tendent l'une et l'autre vers la limite SS'; en conséquence, S''_n tend vers une limite déterminée S'', et l'on a

$$S'' = SS'.$$

Supposons maintenant que les séries (1) et (2) renferment des termes positifs et des termes négatifs, mais qu'elles restent convergentes quand on y remplace chaque terme négatif par sa valeur absolue.

On a

$$S_n S'_n - S''_n = u_{n-1}v_{n-1} + (u_{n-1}v_{n-2} + u_{n-2}v_{n-1}) + \ldots \\ + (u_{n-1}v_1 + u_{n-2}v_2 + \ldots + u_2 v_{n-2} + u_1 v_{n-1}),$$

et nous venons de voir que cette quantité tend vers zéro quand n augmente indéfiniment dans le cas où les quantités u et v sont positives. Or, d'après notre hypothèse, les séries (1) et (2) restent convergentes quand on y change le signe des termes négatifs : donc la somme précédente tendra vers zéro avec $\frac{1}{n}$ si l'on y remplace chaque quantité u ou v par sa valeur absolue. Or un tel changement

ne peut que diminuer la valeur absolue de la somme que nous considérons, et par conséquent on a

$$\lim(S_n S'_n - S''_n) = 0,$$

pour $n = \infty$. Ainsi S''_n tend encore vers une limite déterminée S'', et l'on a

$$S'' = SS'.$$

Remarque. — Il est très-important de remarquer que le précédent théorème ne subsiste pas quand les valeurs absolues des termes des séries (1) et (2) ne forment pas des séries convergentes. Il suffit pour s'en convaincre de prendre pour chacune des séries (1) et (2) la suivante :

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \ldots;$$

on reconnaît immédiatement que, dans cet exemple, la série (3) est divergente.

Expression de la valeur que prend, pour $x = x_0 + h$, une fonction qui s'annule, avec ses $n - 1$ premières dérivées, pour $x = x_0$.

105. Soient $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions de x qui restent continues pour les valeurs de x comprises entre x_0 et $x_0 + h$ et qui aient, pour ces mêmes valeurs, des dérivées déterminées. Si la dérivée $F'(x)$ ne peut devenir nulle ou infinie que pour les valeurs extrêmes x_0, $x_0 + h$, on aura, d'après le théorème du n° 17,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{F(x_0 + h) - F(x_0)} = \frac{f'(x_0 + h_1)}{F'(x_0 + h_1)},$$

h_1 désignant une quantité comprise entre zéro et h. Dans le cas où l'on a

$$f(x_0) = 0, \quad F(x_0) = 0,$$

la formule précédente se réduit à

$$(1) \qquad \frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)}.$$

Supposons que les fonctions $f'(x)$, $F'(x)$ restent continues pour les valeurs de x comprises entre x_0 et x_0+h, qu'elles aient dans cet intervalle des dérivées déterminées $f''(x)$, $F''(x)$, et que $F''(x)$ ne puisse devenir nulle ou infinie qu'aux limites x_0, x_0+h. Si l'on a

$$f'(x_0)=0, \quad F'(x_0)=0,$$

on aura aussi, d'après ce qui précède,

$$\frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)} = \frac{f''(x_0+h_2)}{F''(x_0+h_2)},$$

h_2 étant une quantité comprise entre zéro et h_1.

Supposons généralement que les fonctions $f(x)$, $F(x)$ restent continues pour les valeurs de x comprises entre x_0 et x_0+h, ainsi que toutes les dérivées jusqu'à celle de l'ordre $n-1$ inclusivement, que les dérivées d'ordre n aient des valeurs déterminées et que la dérivée $F^{(n)}(x)$ ne puisse être nulle ou infinie qu'aux limites x_0, x_0+h. Si l'on a

$$\begin{array}{llll} f(x_0)=0, & f'(x_0)=0, & \ldots, & f^{(n-1)}(x_0)=0 \\ F(x_0)=0, & F'(x_0)=0, & \ldots, & F^{(n-1)}(x_0)=0 \end{array}$$

on aura évidemment, par l'application de la formule (1),

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)} = \frac{f''(x_0+h_2)}{F''(x_0+h_2)} = \ldots = \frac{f^{(n)}(x_0+h_n)}{F^{(n)}(x_0+h_n)},$$

$h_1, h_2, \ldots, h_n$ étant des quantités de même signe et dont les valeurs absolues forment une suite décroissante. Si θ désigne une quantité comprise entre 0 et 1, on pourra poser

$$h_n = \theta h,$$

et l'on aura

$$(2)\qquad \frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{F^{(n)}(x_0+\theta h)}.$$

Faisons maintenant

$$F(x) = (x - x_0)^n,$$

d'où

$$F^{(m)}(x) = n(n-1)\ldots(n-m+1)(x-x_0)^{n-m}$$

et

$$F^{(n)}(x) = 1.2.3\ldots n;$$

les conditions auxquelles $F(x)$ a été assujettie seront toutes remplies, et la formule (2) donnera

$$(3)\qquad f(x_0+h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x_0+\theta h).$$

Cette formule (3) est celle que nous voulions établir. Elle suppose la continuité de $f(x)$ et des $n-1$ premières dérivées de cette fonction pour les valeurs de x comprises entre x_0 et x_0+h; elle exige en outre que la dérivée d'ordre n ait une valeur déterminée pour chaque valeur de x comprise entre les mêmes limites, et que l'on ait

$$(4)\qquad f(x_0) = 0,\quad f'(x_0) = 0,\quad \ldots,\quad f^{n-1}(x_0) = 0.$$

Si toutes ces conditions sont remplies et que h soit pris pour infiniment petit principal, $f(x_0+h)$ sera un infiniment petit de l'ordre n. On dit alors que l'équation $f(x) = 0$ admet la racine x_0 avec un degré de multiplicité égal à n.

Formule de Taylor.

106. Soit $F(x)$ une fonction de la variable x qui reste continue ainsi que ses $n-1$ premières dérivées pour les valeurs de x comprises entre x_0 et x_0+h, et dont la dérivée d'ordre n ait une valeur déterminée. Désignons

par $\varphi(x)$ le polynôme de degré $n-1$,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= F(x_0) + \frac{x-x_0}{1} F'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} F''(x_0) + \ldots \\ &+ \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{n-1}(x_0); \end{aligned}\right.$$

la dérivée d'ordre m de ce polynôme sera

$$\begin{aligned} \varphi^{(m)}(x) &= F^{(m)}(x_0) + \frac{x-x_0}{1} F^{(m+1)}(x_0) + \ldots \\ &+ \frac{(x-x_0)^{n-m-1}}{1.2\ldots(n-m-1)} F^{(n-1)}(x_0), \end{aligned}$$

et, en faisant $x = x_0$ dans les deux formules précédentes, il viendra

$$\varphi(x_0) = F(x_0), \quad \varphi^{(m)}(x_0) = F^{(m)}(x_0).$$

Il résulte de là que la formule (3) du numéro précédent est applicable à la fonction

$$f(x) = F(x) - \varphi(x),$$

car toutes les conditions qu'exige cette formule sont remplies. On a donc, à cause de $\varphi^{(n)}(x) = 0$,

$$F(x_0+h) - \varphi(x_0+h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x_0+\theta h),$$

θ étant une quantité comprise entre 0 et 1. La valeur de $\varphi(x_0+h)$ est donnée par la formule (1), et l'on a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} F(x_0+h) &= F(x_0) + \frac{h}{1} F'(x_0) + \frac{h^2}{1.2} F''(x_0) + \ldots \\ &+ \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(x_0+\theta h). \end{aligned}\right.$$

Nous remplacerons x_0 par x et nous écrirons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} F(x+h) &= F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots \\ &+ \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(x) + R_n, \end{aligned}\right.$$

en posant

$$(4) \qquad R_n = \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(x+\theta h).$$

La formule (3) suppose, nous devons le répéter, que la fonction F et ses $n-1$ premières dérivées soient continues pour les valeurs de la variable comprises entre x et $x+h$; elle exige en outre que la dérivée d'ordre n ait une valeur déterminée.

Supposons maintenant que toutes les dérivées successives de la fonction F satisfassent à la condition de la continuité et qu'en outre la quantité R_n tende vers zéro, quand n tend vers l'infini, on aura, par la formule (3),

$$(5) \quad F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} F'''(x) + \ldots.$$

Cette formule (5) est celle de Taylor; elle donne le développement de $F(x+h)$ en série convergente ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de h, quand les conditions que nous avons mentionnées sont remplies. La quantité R_n déterminée par la formule (4) est le reste de la série; cette formule (4) fait connaître ainsi des limites de l'erreur commise quand on arrête la série au $n^{\text{ième}}$ terme.

107. Autre forme du reste. — On peut donner au reste R_n une forme différente de celle à laquelle nous avons été conduit et qui est souvent utile. Pour l'obtenir, remplaçons h par $z-x$ dans la formule (3); le reste R_n deviendra une fonction de x et de z, mais nous le désignerons simplement par $f(x)$. On aura

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} F(z) &= F(x) + \frac{z-x}{1} F'(x) + \frac{(z-x)^2}{1.2} F''(x) + \ldots \\ &\quad + \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(x) + f(x), \end{aligned} \right.$$

et si l'on prend les dérivées des deux membres par rapport à x, en regardant z comme une constante, il viendra, toutes réductions faites,

$$(7) \qquad f'(x) = -\frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n)}(x).$$

La fonction $f(x)$ qui est définie par la formule (6) est continue, par suite de nos hypothèses, pour les valeurs de la variable comprises entre x et $x+h=z$; on a donc (n° **14**), en désignant par θ une quantité comprise entre o et 1,

$$f(z) - f(x) = (z-x) f'[x+\theta(z-x)],$$

ce qui n'est au surplus que la formule de Taylor bornée au premier terme et complétée par le reste. Or, d'après la formule (6), $f(x)$ s'annule pour $x=z$; donc on a

$$(8) \qquad f(x) = -(z-x) f'[x+\theta(z-x)].$$

Si l'on remplace x par $x+\theta(z-x)$, la formule (7) deviendra

$$f'[x+\theta(z-x)] = -\frac{(1-\theta)^{n-1}(z-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n)}[x+\theta(z-x)],$$

et la formule (8) donnera ensuite

$$(9) \quad f(x) = \frac{(1-\theta)^{n-1}(z-x)^{n}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n)}[x+\theta(z-x)].$$

Remettant enfin $x+h$ au lieu de z, il viendra

$$(10) \qquad R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1} h^n}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n)}(x+\theta h).$$

La quantité désignée par θ dans cette formule n'est pas la même que celle de la formule (4); mais elle est comme celle-ci comprise entre o et 1.

108. Si l'on pose

$$y = F(x)$$

et

$$\Delta y = F(x+h) - F(x),$$

les quantités

$$hF'(x), \quad h^2F''(x), \quad h^3F'''(x), \quad \ldots$$

seront précisément les différentielles successives

$$dy, \; d^2y, \; d^3y, \; \ldots$$

de la fonction y. Si l'on désigne en outre par

$$d'^n y$$

la quantité $h^n F^n(x+\theta h)$, qui est la différentielle $n^{\text{ième}}$ de y répondant à une valeur de la variable comprise entre x et $x+h$, la formule (3) du n° **106** deviendra

$$\Delta y = dy + \frac{d^2y}{1.2} + \frac{d^3y}{1.2.3} + \ldots + \frac{d^{n-1}y}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{d'^n y}{1.2\ldots n}.$$

Si l'on suppose que h ou dx soit un infiniment petit et qu'on le choisisse pour infiniment petit principal, dy, d^2y, ..., $d^{n-1}y$ seront des infiniment petits des ordres respectifs 1, 2, ..., $(n-1)$; pareillement $d'^n y$ sera en général un infiniment petit de l'ordre n.

Remarques sur la formule de Taylor.

109. 1° La formule (3) du n° **106** peut être exacte jusqu'à une certaine valeur de n, puis devenir inexacte pour des valeurs plus grandes. Soit, par exemple,

$$F(x) = (x-x_0)^\mu \varphi(x) + \psi(x),$$

μ étant un nombre positif fractionnaire, et les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ étant continues ainsi que leurs dérivées pour les valeurs de x comprises entre x_0 et x_0+h. Si m est

le plus grand entier contenu dans μ, la formule (3) subsistera pour $x = x_0$, pourvu que n ne soit pas supérieur à m, car la $(m+1)^{\text{ième}}$ dérivée de $F(x)$ devient infinie pour $x = x_0$.

2° Il ne suffit pas que le second membre de la formule de Taylor soit une série convergente pour qu'on soit en droit d'affirmer l'exactitude de cette formule. Par exemple, si l'on pose

$$F(x) = f(x) + e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}},$$

$f(x)$ étant une fonction à laquelle la formule de Taylor est applicable dans l'hypothèse de $x = x_0$, on aura, quel que soit n,

$$F^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

par les règles qui seront établies plus loin. Ainsi, dans cet exemple, le second membre de la formule (5) du n° 106 convergera vers la limite $f(x_0+h)$ et non pas vers $F(x_0+h)$. Pour pouvoir faire usage de la formule, il faut donc avoir établi que le reste R_n tend vers la limite zéro.

3° Si l'on arrête la série de Taylor à un terme quelconque $u_n = \frac{h^{n-1}F^{(n-1)}(x)}{1.2\ldots(n-1)}$ qui ne soit pas nul, on peut prendre h assez petit pour que ce terme surpasse en valeur absolue le reste R_n. En effet, on a $R_{n-1} = u_n + R_n$, d'où

$$\frac{R_n}{u_n} = \frac{R_{n-1} - u_n}{u_n} = \frac{F^{(n-1)}(x+\theta h) - F^{(n-1)}(x)}{F^{(n-1)}(x)};$$

ce rapport est infiniment petit en même temps que h; il sera donc moindre qu'une quantité quelconque donnée, si l'on donne à h une valeur suffisamment petite.

4° Si pour chaque valeur de la variable comprise

entre x et $x+h$ la dérivée d'ordre n de F reste finie, quel que soit n, la formule de Taylor a lieu nécessairement.

En effet, l'expression du reste peut se mettre sous la forme

$$R_n = \frac{h}{1}\,\frac{h}{2}\,\frac{h}{3}\cdots\frac{h}{n} \times F^{(n)}(x+\theta h).$$

Quelle que soit la valeur donnée de h, le nombre i de celles des fractions

$$\frac{h}{1},\quad \frac{h}{2},\quad \frac{h}{3},\quad \ldots,$$

qui sont inférieures à une quantité donnée α, est limité. Désignons par P_n le produit de ces i fractions multiplié par $F^{(n)}(x+\theta h)$, qui est par hypothèse une quantité finie; il est évident que la valeur absolue de R_n sera inférieure à la valeur absolue du produit $P_n\alpha^{n-i}$. On peut prendre pour α une quantité quelconque inférieure à l'unité; alors α^{n-i} tend vers zéro quand n tend vers l'infini, tandis que P_n conserve une valeur finie; donc R_n tend vers la limite zéro.

Formule de Maclaurin.

110. Si l'on fait $x=0$ dans la formule (3) du n° 106 et qu'ensuite on écrive x au lieu de h, il viendra

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} F(x) &= F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \frac{x^2}{1.2}F''(0) + \ldots \\ &\quad + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0) + R_n; \end{aligned}\right.$$

en même temps, les formules (4) et (10) du même numéro donneront

$$(2)\qquad R_n = \frac{x^n}{1.2\ldots n}F^n(\theta x)$$

et

$$(3)\qquad R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2\ldots(n-1)}F^n(\theta x),$$

θ désignant dans la formule (2) et dans la formule (3) une quantité comprise entre o et 1. Rappelons enfin que la formule (1) suppose que la fonction F reste continue ainsi que ses dérivées pour les valeurs de la variable comprises entre zéro et x.

Si *toutes* les dérivées de la fonction F satisfont à la condition relative à la continuité et que la quantité R_n tende vers zéro quand n tend vers l'infini, la formule (1) donnera la valeur de $F(x)$ développée en série convergente, ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, savoir

$$(4)\quad F(x) = F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \frac{x^2}{1.2}F''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}F'''(0) + \ldots.$$

La formule (4) est celle de Maclaurin; la formule (2) ou (3) fait connaître des limites de l'erreur commise quand on arrête la série à un terme quelconque.

Remarque. — La formule de Maclaurin résulte immédiatement de celle de Taylor, mais la réciproque a lieu aussi. On obtient effectivement la formule de Taylor en appliquant celle de Maclaurin à la fonction

$$f(x) = F(x+h),$$

et en changeant ensuite h en x.

La formule de Maclaurin a lieu, comme celle de Taylor, lorsque la dérivée d'ordre n de la fonction F reste finie, quel que soit n, pour les valeurs de la variable comprises entre zéro et x.

111. *Tout développement d'une fonction* $F(x)$ *en série convergente ordonnée suivant les puissances entières et*

croissantes de x est nécessairement identique avec celui qui est fourni par la formule de Maclaurin.

Car supposons que l'on ait, par la formule de Maclaurin,

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \ldots,$$

et que l'on ait trouvé, par une voie quelconque,

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots,$$

les deux séries étant supposées convergentes pour les valeurs de x comprises entre zéro et une certaine limite X, on aura

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

Cette égalité ayant lieu pour $x = 0$, on en conclut

$$A_0 = a_0,$$

et l'on a, par suite,

$$A_1 x + A_2 x^2 + \ldots = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

ou

$$A_1 + A_2 x + \ldots = a_1 + a_2 x + \ldots,$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre zéro et X. L'hypothèse $x = 0$ donne ensuite

$$A_1 = a_1,$$

puis

$$A_2 + A_3 x + \ldots = a_2 + a_3 x + \ldots,$$

ce qui donne

$$A_2 = a_2,$$

et ainsi de suite.

Développement de la fonction e^x en série ordonnée suivant les puissances entières de x.

112. Les dérivées successives de la fonction e^x sont égales à cette fonction et ainsi elles restent finies quelle

que soit la valeur attribuée à x. Il résulte de là (n° 110) que la fonction e^x est développable en série convergente, d'après la formule de Maclaurin, pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et $+\infty$. La fonction et ses dérivées se réduisant à l'unité pour $x = 0$, on a

$$(1) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

et le reste de la série correspondant au $n^{\text{ième}}$ terme est

$$(2) \qquad R_n = \frac{x^n}{1.2\ldots n} e^{\theta x}.$$

Si a désigne un nombre positif quelconque et qu'on remplace x par $x \log a$, la caractéristique log exprimant un logarithme népérien, il viendra, à cause de $e^{x \log a} = a^x$

$$(3) \qquad a^x = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{x^2 \log^2 a}{1.2} + \frac{x^3 \log^3 a}{1.2.3} + \ldots$$

et

$$(4) \qquad R_n = \frac{x^n \log^n a}{1.2.3\ldots n} a^{\theta x}.$$

113. Remarque sur le nombre e. — Il est facile d'établir que non-seulement le nombre e est irrationnel, mais aussi qu'il n'est pas racine d'une équation du deuxième degré à coefficients entiers. En effet, si e est racine d'une telle équation, on aura

$$\alpha e \pm \frac{\beta}{e} = \pm \gamma,$$

α, β, γ étant des nombres entiers positifs; or on a, par les formules (1) et (2),

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{e^\theta}{1.2\ldots n},$$

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{(-1)^n e^{-\lambda}}{1.2\ldots n},$$

θ et λ étant des nombres compris entre 0 et 1. La substitution de ces valeurs donne

$$\alpha\left[1+\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}+\frac{e^\theta}{1.2\ldots n}\right]$$
$$\pm 6\left[1-\frac{1}{1}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+\frac{(-1)^n e^{-\lambda}}{1.2\ldots n}\right]=\pm\gamma,$$

puis, en multipliant par $1.2\ldots(n-1)$, on a

$$\frac{\alpha e^\theta \pm (-1)^n 6 e^{-\lambda}}{n}=\mu,$$

μ étant un entier. Comme on peut prendre le nombre n pair ou impair à volonté, on est maître du signe de $\pm(-1)^n$, et en adoptant le signe $+$ on aura

$$\frac{\alpha e^\theta + 6 e^{-\lambda}}{n}=\mu.$$

Cette égalité ne peut évidemment avoir lieu, car le second membre est un nombre entier et le premier membre est une fraction positive qui peut être aussi petite que l'on veut; donc notre proposition se trouve établie.

Développement des fonctions $\cos x$ *et* $\sin x$ *en séries ordonnées suivant les puissances entières de* x.

114. Les dérivées d'ordre n des fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont respectivement

$$\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\quad \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),$$

π étant la demi-circonférence dont le rayon est 1. Ces dérivées restent donc finies quelle que soit la valeur que l'on attribue à x, et il en résulte (n° **110**) que les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont développables en séries convergentes, quel que soit x, par la formule de Maclaurin.

Pour $x=0$, les valeurs de la fonction $\cos x$ et de ses dérivées forment une suite périodique dont la période est

$$1, \quad 0, \quad -1, \quad 0:$$

pareillement les valeurs de la fonction $\sin x$ et de ses dérivées forment une suite périodique dont la période est

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad -1.$$

On a donc, pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et $+\infty$,

$$(1) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{1.2\ldots 2m} + \ldots,$$

$$(2) \qquad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{1.2\ldots(2m+1)} + \ldots.$$

Pour avoir le reste de la série (1) arrêtée au terme de degré $2m$, on peut faire $n=2m+2$ dans la première des formes générales de R_n, et il vient alors

$$(3) \qquad R_{2m+2} = \frac{x^{2m+2}}{1.2\ldots(2m+2)} \cos[\theta x + (m+1)\pi];$$

de même le reste de la série (2) arrêtée au terme de degré $2m+1$ sera

$$(4) \qquad R_{2m+3} = \frac{x^{2m+3}}{1.2\ldots(2m+3)} \cos[\theta x + (m+1)\pi].$$

Si l'arc x est compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, et que l'on donne à m les valeurs successives $0, 1, 2, 3, \ldots$, l'expression précédente de R_{2m+2} ou de R_{2m+3} sera alternativement positive et négative; il s'ensuit que, si l'on arrête la série (1) ou (2) au premier terme, au deuxième terme, etc., on aura une suite de valeurs alternativement plus grandes

et plus petites que $\cos x$ ou $\sin x$. Ainsi, en particulier,

$$\cos x < 1, \quad \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1.2.3.4},$$

$$\sin x < x, \quad \sin x > \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3}, \quad \sin x < \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}.$$

Développement de la fonction $\log(1+x)$ *en série ordonnée suivant les puissances entières de* x.

115. On a, en désignant par la caractéristique log un logarithme népérien,

$$\frac{d\log(1+x)}{dx} = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},$$

et généralement

$$\frac{d^n\log(1+x)}{dx^n} = (-1)^{n-1}\,1.2\ldots(n-1)\,(1+x)^{-n}.$$

Pour $x=0$, ces expressions se réduisent respectivement à 1 et $(-1)^{n-1}\,1.2\ldots(n-1)$, $\log(1+x)$ s'annule; on a donc

$$(1)\qquad \log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + \mathrm{R}_n,$$

puis

$$(2)\qquad \mathrm{R}_n = \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+\theta x)^n}$$

ou

$$(3)\qquad \mathrm{R}_n = \frac{(-1)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1+\theta x)^n};$$

si donc le reste R_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini, on aura, par la formule de Maclaurin,

$$(4)\qquad \log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

La série contenue dans cette formule n'est pas convergente lorsque la valeur absolue de x est supérieure à 1, car le rapport du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme au précédent, savoir $\frac{x}{1+\frac{1}{n}}$, tend vers la limite x quand n tend vers l'infini. Ainsi la formule (4) ne peut subsister que pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$.

Pour reconnaître si le reste R_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini, nous distinguerons deux cas, suivant que x est positif ou négatif.

1° Si l'on a $x > 0$, nous emploierons la forme (2) du reste, savoir

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n;$$

lorsque x est <1, les deux facteurs $\frac{1}{n}$ et $\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$ tendent l'un et l'autre vers zéro quand n augmente indéfiniment; dans le cas de $x = 1$, il se peut que le deuxième facteur ne décroisse pas indéfiniment, mais il reste toujours inférieur à 1. Donc le reste R_n tend vers zéro et la formule (4) a lieu.

2° Si l'on a $x < 0$, nous emploierons la forme (3) du reste, et en posant $x = -z$ il viendra

$$R_n = \frac{-z}{1-\theta z}\left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^{n-1}.$$

Lorsque z est <1, la valeur absolue du premier facteur est toujours une quantité finie inférieure à $\frac{z}{1-z}$; quant au deuxième facteur, il est inférieur à z^{n-1}, et par conséquent il tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Donc la formule (4) a lieu pour les valeurs de x comprises entre 0 et -1. Dans le cas de $x = -1$, les deux membres de cette formule deviennent infinis (n° 98).

On voit en résumé que la formule (4) subsiste pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$.

REMARQUE. — Dans le cas de x positif, le reste R_n a le signe de $(-1)^{n-1}$ et sa valeur absolue est moindre que $\frac{x^n}{n}$, d'après la formule (2); ce reste peut donc se représenter encore par la formule

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{\theta x^n}{n},$$

θ étant une quantité comprise entre 0 et 1.

Dans le cas de x négatif et égal à $-z$, si l'on a $z < 1$, $-R_n$ est le produit de deux facteurs positifs qui sont respectivement inférieurs à $\frac{z}{1-z}$ et z^{n-1}; on peut donc écrire

$$R_n = -\frac{\theta z^n}{n(1-z)} \quad \text{ou} \quad R_n = (-1)^{n-1}\frac{\theta x^n}{n(1+x)},$$

θ étant toujours une quantité comprise entre 0 et 1.

Ainsi l'on a, en désignant ici par x une quantité comprise entre 0 et 1, et par θ, θ' deux quantités également comprises entre 0 et 1.

$$\log(1+x) = x - \frac{\theta x^2}{2},$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{\theta' x^2}{2(1-x)}.$$

Formules relatives au calcul des logarithmes.

116. CALCUL DES LOGARITHMES NÉPÉRIENS. — La quantité x étant comprise entre 0 et 1, on a les deux formules

$$(1) \qquad \log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

$$(2) \qquad \log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots,$$

et, en les retranchant l'une de l'autre, il vient

$$(3)\qquad \log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right).$$

Posons, dans la formule (1), $x = \frac{h}{N}$, ce qui donne $\log(1+x) = \log(N+h) - \log N$, il viendra

$$(4)\quad \log(N+h) - \log N = \frac{h}{N} - \frac{h^2}{2N^2} + \frac{h^3}{2N^3} - \ldots$$

faisons ensuite, dans la formule (3),

$$x = \frac{h}{2N+h},\quad \text{d'où}\quad \frac{1+x}{1-x} = \frac{N+h}{N};$$

on aura

$$(5)\ \left\{\begin{aligned} &\log(N+h) - \log N \\ &\quad = 2\left[\frac{h}{(2N+h)} + \frac{h^3}{3(2N+h)^3} + \frac{h^5}{5(2N+h)^5} + \ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

Les formules (4) et (5) peuvent être employées pour calculer le logarithme népérien d'un nombre $N+h$, quand le logarithme de N est connu. Les séries contenues dans ces formules sont très-convergentes, dès que N est un peu considérable relativement à h. On a, en particulier, pour $h = 1$,

$$(6)\quad \log(N+1) - \log N = \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \ldots.$$

$$(7)\ \left\{\begin{aligned} &\log(N+1) - \log N \\ &\quad = 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

117. Module des logarithmes vulgaires. — On a

$$e^{\log x} = 10^{\log\text{vulg} x},$$

puisque chacune de ces expressions est la valeur de x; en

prenant les logarithmes népériens de part et d'autre, on a

$$\log x = \log\text{vulg}\, x \times \log 10,$$

et, en faisant

$$(8)\qquad M = \frac{1}{\log 10},$$

il vient

$$\log\text{vulg}\, x = \log x \times M.$$

Ainsi l'on obtiendra les logarithmes vulgaires en multipliant les logarithmes népériens par le nombre constant M qu'on nomme *module* des logarithmes.

Les formules du numéro précédent fournissent le moyen de calculer M; d'abord la formule (7) donne, pour $N = 1$,

$$(9)\qquad \log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} + \dots\right);$$

la formule (5) donne ensuite, en faisant $N = 8$, $h = 2$,

$$(10)\qquad \log 10 = 3\log 2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \dots\right),$$

et l'on a, en conséquence, par les formules (8), (9), (10),

$$(11)\qquad \frac{1}{M} = 6\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \dots\right) + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \dots\right).$$

Les séries qui figurent dans cette formule sont suffisamment convergentes; mais on peut en obtenir une infinité d'autres, dans lesquelles les termes décroissent plus rapidement. Par exemple, si l'on fait, dans la formule (5), $N = 4096 = 2^{12}$, $h = 4$, d'où $N + h = 4100$, et, dans la formule (7), $N = 40 = 2^4 \times 10$, il viendra

$$\log 41 + 2\log 10 = 12\log 2 + 2\left(\frac{1}{2049} + \frac{1}{3.2049^3} + \dots\right),$$

$$\log 41 = \log 10 + 2\log 2 + 2\left(\frac{1}{81} + \frac{1}{3.81^3} + \dots\right);$$

en éliminant log 41 et log 2 entre ces équations et l'équation (10), il vient

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{M} &= 20\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\ldots\right)\\ &\quad +6\left(\frac{1}{81}+\frac{1}{3.81^3}+\frac{1}{5.81^5}+\ldots\right)\\ &\quad -6\left(\frac{1}{2049}+\frac{1}{3.2049^3}+\ldots\right).\end{aligned}\right.$$

Si l'on calcule chaque terme de la formule (11) ou de la formule (12) avec vingt-huit décimales, de manière à pouvoir en conserver vingt-cinq dans les valeurs de $\frac{1}{M}$ et de M, on trouvera

$$(13)\quad \frac{1}{M} = 2,30258\,50929\,94045\,68401\,79914\ldots,$$

$$(14)\quad M = 0,43429\,44819\,03251\,82765\,11289\ldots.$$

118. Calcul des logarithmes vulgaires. — Les formules (4) et (5) s'appliqueront aux logarithmes vulgaires, si l'on multiplie leurs seconds membres par le module M. On a donc

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \log(N+h)-\log N &= M\left[\frac{h}{N}-\frac{h^2}{2N^2}+\frac{h^3}{3N^3}-\ldots\right],\\ \log(N+h)-\log N &= 2M\left[\frac{h}{2N+h}+\frac{h^3}{3(2N+h)^3}+\ldots\right],\end{aligned}\right.$$

et, en faisant $h = 1$,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \log(N+1)-\log N &= M\left[\frac{1}{N}-\frac{1}{2N^2}+\frac{1}{3N^3}-\ldots\right],\\ \log(N+1)-\log N &= 2M\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\ldots\right].\end{aligned}\right.$$

Le module M étant connu, on pourra faire usage des formules (15) et (16) pour le calcul des logarithmes vulgaires.

119. Remarque sur l'emploi des Tables de logarithmes. — Quand on fait usage des Tables de logarithmes, on suppose que les petits accroissements des nombres sont proportionnels aux accroissements correspondants de leurs logarithmes. Nous allons établir que cette proportionnalité peut être admise pour l'approximation qu'on prétend obtenir. A cet effet, reprenons la formule

$$\log(1 + x) = x - \frac{\theta x^2}{2},$$

obtenue au n° 115, et dans laquelle x désigne un nombre donné compris entre 0 et 1, θ une quantité positive inférieure à 1. Multiplions le second membre par le module M afin de passer aux logarithmes vulgaires, et remplaçons x par $\frac{h}{N}$, il viendra

$$(17) \qquad \log(N + h) - \log N = M\left(\frac{h}{N} - \frac{\theta h^2}{2N^2}\right);$$

on aura aussi, en faisant $h = 1$ et en écrivant θ' au lieu de θ,

$$(18) \qquad \log(N + 1) - \log N = M\left(\frac{1}{N} - \frac{\theta'}{2N^2}\right).$$

Posons

$$\log(N + h) - \log N = \Delta, \quad \log(N + 1) - \log N = D,$$

puis

$$(19) \qquad \Delta = hD + \varepsilon, \quad h = \frac{\Delta}{D} + \eta,$$

ε sera l'erreur commise dans le calcul du logarithme de $N + h$, au moyen des tables, et en admettant la proportion

$$(20) \qquad \frac{\Delta}{D} = \frac{h}{1};$$

pareillement η sera l'erreur commise dans le calcul d'un nombre dont le logarithme est donné, quand on fait usage de la même proportion.

Si l'on remplace, dans les formules (19), Δ et D par les valeurs tirées des formules (17) et (18), il viendra

$$\varepsilon = \frac{M(\theta' h - \theta h^2)}{2N^2}, \quad \eta = \frac{\theta h^2 - \theta' h}{2N - \theta'};$$

or h, θ, θ' sont compris entre 0 et 1 et M est $< \frac{1}{2}$; on a donc

$$\pm \varepsilon < \frac{1}{4N^2}, \quad \pm \frac{\eta}{N} < \frac{1}{2N^2},$$

$\pm \varepsilon$ et $\pm \eta$ étant les valeurs absolues de ε et η. On voit que, si N est supérieur à 10000, l'erreur $\pm \varepsilon$ est moindre que le quart d'une unité du huitième ordre décimal; pareillement l'erreur relative $\frac{\pm \eta}{N}$ est moindre qu'une demi-unité du huitième ordre décimal. Donc l'emploi de la proportion (20) est légitime quand on se borne à sept figures, soit qu'il s'agisse de calculer le logarithme d'un nombre donné, soit qu'on veuille au contraire calculer le nombre qui répond à un logarithme donné.

Formule du binôme.

120. L'expression $(a+b)^m$ est susceptible de plusieurs valeurs, excepté dans le cas où m est égal à un nombre entier positif ou négatif. Mais, si $a+b$ est positive, l'une de ces valeurs est réelle et positive : c'est la seule que nous considérons. Si l'on pose $\frac{b}{a} = x$, notre expression sera le produit de a^m par $(1+x)^m$; cette dernière fonction est celle dont nous avons à nous occuper et que nous nous proposons de développer en série ordonnée suivant les

puissances entières de x. On a

$$\frac{d^n(1+x)^m}{dx^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n};$$

cette dérivée se réduit à

$$m(m-1)\ldots(m-n+1)$$

pour $x=0$; par conséquent on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots \\ + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1} + R_n, \end{aligned}\right.$$

et

$$(2)\quad R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n},$$

ou

$$(3)\quad R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{m-n},$$

θ désignant, comme à l'ordinaire, une quantité comprise entre 0 et 1. Enfin, si R_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini, on aura

$$(4)\quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots,$$

ce qui est la formule du binôme pour un exposant quelconque. Il est presque superflu d'ajouter que cette formule se termine d'elle-même, quand m est un entier positif; nous faisons abstraction de ce cas.

Le rapport du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme au $n^{\text{ième}}$ terme de la série (4) est $\frac{m-n+1}{n}x$ ou $-\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x$, quantité qui tend vers la limite $-x$, quand n tend vers l'infini; il résulte de là que la formule (4) ne peut subsister que si x est comprise entre -1 et $+1$, puisque, dans le cas

contraire, les valeurs absolues des termes de la série croissent constamment à partir d'une certaine limite.

Nous supposerons d'abord x comprise entre o et 1; alors on a, en employant la forme (2) du reste,

$$R_n = \left[\frac{mx}{1} \cdot \frac{(m-1)x}{2} \cdot \frac{(m-2)x}{3} \cdots \frac{(m-n+1)x}{n}\right] \frac{1}{(1+\theta x)^{n-m}}.$$

La quantité entre crochets tend vers zéro quand n tend vers l'infini; en effet, quand n augmente de 1, elle acquiert le facteur $-x\left(1-\frac{m+1}{n}\right)$ qui tend vers la limite $-x$, lorsque n augmente indéfiniment. Il s'ensuit que la quantité dont nous parlons est un produit dans lequel les facteurs plus grands que 1, en valeur absolue, sont en nombre limité, tandis que le nombre de ceux dont la valeur absolue est inférieure à 1 et même inférieure à une quantité quelconque comprise entre x et 1 peut devenir plus grand que tout nombre donné. Quant au facteur $\frac{1}{(1+\theta x)^{n-m}}$, il peut avoir l'unité pour limite, si la limite de θ est nulle, mais en aucun cas il ne surpassera l'unité. Il résulte de là que R_n tend vers zéro, si x est positive et inférieure à 1, et, dans ce cas, la formule (4) a lieu.

Supposons maintenant que x soit comprise entre o et -1; nous poserons $x=-z$ et nous emploierons ici la forme (3) du reste. On a

$$R_n = (-1)^n \left[\frac{(m-1)z}{1} \cdots \frac{(m-n+1)z}{n-1}\right] mz(1-\theta z)^{m-1} \left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, le facteur entre crochets tend vers zéro, ainsi qu'on l'a vu dans le cas précédent. Quant au facteur $mz(1-\theta z)^{m-1} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}$, il tendra aussi vers zéro, à moins que la limite de θ ne soit zéro; mais alors sa valeur sera finie et égale au plus à mz. Il résulte

de là que R_n tend vers zéro ; et en conséquence la formule (4) subsiste pour les valeurs de x comprises entre o et — 1.

121. L'analyse précédente montre que la formule (4) a lieu pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$; mais elle n'apprend rien à l'égard des valeurs limites -1 et $+1$. Abel a démontré que, si une série ordonnée suivant les puissances entières positives d'une variable x est convergente, lorsqu'on attribue à cette variable la valeur x_1, la même série est aussi convergente pour tout nombre x dont la valeur numérique est inférieure à celle de x_1 ; en outre, si s représente la somme de la série relative à la valeur x et s_1 celle de la série relative à la valeur x_1, s tend vers s_1 lorsque x tend vers x_1. La formule (4) subsiste donc, pour les valeurs limites -1 et $+1$, pourvu que la série du second membre reste convergente ; il est facile de déterminer dans quels cas cette convergence persiste. Lorsque $x=\pm 1$, le rapport du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de la série (4) au $n^{\text{ième}}$ terme est $\mp\left(1-\frac{m+1}{n}\right)$; donc, si $m+1$ est un nombre négatif, les valeurs absolues des termes seront constamment croissantes et la série sera divergente ; ainsi nous devons supposer $m+1$ positif.

Désignons par u_n la valeur absolue du $n^{\text{ième}}$ terme de la série (4) dans l'hypothèse de $x=\pm 1$, et par v_n le $n^{\text{ième}}$ terme de la série

$$\frac{1}{1^{m+1}},\quad \frac{1}{2^{m+1}},\quad \frac{1}{3^{m+1}},\quad \frac{1}{4^{m+1}},\quad \ldots,$$

on aura

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{m+1}{n},\quad \frac{v_{n+1}}{v_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(m+1)}.$$

La formule du binôme est applicable à la fonction $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(m+1)}$; en se bornant à deux termes on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{m+1}{n} + \frac{(m+1)(m+2)}{2n^2}\left(1+\frac{\theta}{n}\right)^{-m-3},$$

et, comme $(m+1)$ est positif, on aura

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{ou} \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n}.$$

Soit, pour une certaine valeur de n,

$$\frac{u_n}{v_n} = k \quad \text{ou} \quad u_n = kv_n,$$

on aura

$$u_{n+1} < kv_{n+1}, \quad u_{n+2} < kv_{n+2}, \quad u_{n+3} < kv_{n+3}, \quad \ldots;$$

or la série

(5) $$kv_0, \; kv_1, \; kv_2, \; \ldots$$

est convergente quand m est positif (n° 98); donc la série

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \; \ldots,$$

est aussi convergente. Ainsi, dans le cas de $m > 0$, la formule (4) subsiste pour $x = \pm 1$, et l'on a

(6) $$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots,$$

(7) $$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots.$$

Lorsque m est négatif, le premier membre de la formule (4) est infini pour $x = -1$, et la série du second membre est toujours divergente. Mais cette série est convergente pour $x = +1$ si m est compris entre 0 et -1, et en conséquence la formule (6) subsiste pour ces va-

leurs de m. En effet, les termes de la série (6) sont alternativement positifs et négatifs dans notre hypothèse, et leurs valeurs absolues décroissent indéfiniment, puisque ces valeurs sont respectivement moindres, à partir d'un certain rang, que les termes correspondants de la série (5).

Développement de la fonction $f(x+h)$ en série ordonnée suivant les puissances de h, dans les cas où la formule de Taylor n'a pas lieu.

122. Si la fonction $f(x)$ ou quelqu'une de ses dérivées devient discontinue quand la variable x atteint la valeur particulière x_0, la quantité $f(x_0+h)$ ne peut plus être développée, par la formule de Taylor, en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de h. Mais, si l'on admet des puissances négatives ou fractionnaires de h, il peut arriver que $f(x_0+h)$ soit encore développable en une série convergente; dans ce cas, on calcule successivement, comme nous allons l'indiquer, les divers termes de la série.

Si la fonction $f(x)$ a une valeur finie A différente de zéro, pour $x=x_0$, et qu'elle soit continue pour les valeurs de x comprises entre x_0 et x_0+h, on aura

$$f(x_0+h)=\mathrm{A}+\varepsilon, \tag{1}$$

ε désignant une quantité qui s'annule avec h.

La fonction $f(x)$ étant toujours continue de x_0 à x_0+h, supposons qu'elle s'annule pour $x=x_0$ et que, h étant pris pour l'infiniment petit principal, on puisse trouver un nombre positif n, entier ou fractionnaire, qui représente l'ordre infinitésimal de $f(x_0+h)$. On aura, dans cette hypothèse,

$$\lim \frac{f(x_0+h)}{h^n}=\mathrm{A},$$

A étant une quantité finie différente de zéro, et par conséquent on aura aussi, en désignant par ε un infiniment petit,

$$(2) \qquad f(x_0+h) = h^n(\mathrm{A}+\varepsilon).$$

Enfin, si la fonction $f(x)$ devient infinie pour $x = x_0$ et que l'on puisse trouver un nombre positif m qui exprime l'ordre infinitésimal de $f(x_0+h)$ relativement à $\frac{1}{h}$, de manière que l'on ait

$$\lim h^m f(x_0+h) = \mathrm{A},$$

A étant une quantité finie différente de zéro, on aura

$$(3) \qquad f(x_0+h) = \frac{1}{h^m}(\mathrm{A}+\varepsilon),$$

formule où ε désigne toujours un infiniment petit.

La formule (2) comprend la formule (3) quand on attribue au nombre n la valeur négative $-m$; elle comprend aussi la formule (1) si l'on admet pour n la valeur zéro. Ainsi, dans les trois cas que nous avons examinés, on a, en écrivant x au lieu de x_0+h,

$$(4) \qquad f(x) = (x-x_0)^n f_1(x),$$

n étant un nombre positif nul ou négatif et $f_1(x)$ une fonction qui, pour $x = x_0$, prend une valeur finie A différente de zéro. La fonction

$$f_1(x) - \mathrm{A}$$

s'annulant pour $x = x_0$, si l'on peut trouver un nombre positif $n_1 - n$ qui exprime son ordre infinitésimal relativement à $h = x - x_0$, on aura de même

$$f_1(x) - \mathrm{A} = (x-x_0)^{n_1-n} f_2(x),$$

$f_2(x)$ étant une fonction qui, pour $x = x_0$, prend une valeur finie A_1 différente de zéro. Alors la formule (4) deviendra

$$(5)\qquad f(x) = A(x - x_0)^n + (x - x_0)^{n_1} f_2(x).$$

La fonction

$$f_2(x) - A_1$$

s'annule encore pour $x = x_0$, et si l'on peut trouver un nombre positif $n_2 - n_1$ qui exprime l'ordre infinitésimal de cette fonction, on aura

$$f_2(x) - A_1 = (x - x_0)^{n_2 - n_1} f_3(x),$$

$f_3(x)$ ayant, pour $x = x_0$, une valeur finie A_2 différente de zéro. La formule (5) deviendra donc

$$(6)\quad f(x) = A(x - x_0)^n + A_1(x - x_0)^{n_1} + (x - x_0)^{n_2} f_3(x).$$

En continuant ainsi, on aura cette expression de $f(x)$,

$$(7)\quad \begin{cases} f(x) = A(x - x_0)^n + A_1(x - x_0)^{n_1} + A_2(x - x_0)^{n_2} + \ldots \\ \qquad + A_{i-1}(x - x_0)^{n_{i-1}} + R_i, \end{cases}$$

où l'on fait

$$(8)\quad R_i = (x - x_0)^{n_i} f_{i+1}(x) = (x - x_0)^{n_{i-1}} [f_i(x) - A_{i-1}].$$

Mais cette formule suppose que les nombres croissants

$$n,\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_i$$

puissent être déterminés de telle manière que, pour toute valeur de k comprise entre 1 et i, le rapport

$$\frac{f_k(x) - A_{k-1}}{(x - x_0)^{n_k - n_{k-1}}}$$

tende vers la limite finie A_k différente de zéro, quand x tend vers x_0.

Lorsque ces conditions sont remplies, quel que soit i, et que la quantité R_i tend vers zéro, à mesure que i augmente indéfiniment, la formule (7) donne

$$(9)\quad f(x) = A(x-x_0)^n + A_1(x-x_0)^{n_1} + A_2(x-x_0)^{n_2} + \ldots,$$

ou, en remettant $x_0 + h$ au lieu de x,

$$(10)\qquad f(x_0+h) = Ah^n + A_1 h^{n_1} + A_2 h^{n_2} + \ldots,$$

ce qui est le développement de $f(x_0+h)$ en série ordonnée suivant les puissances croissantes positives ou négatives de h.

123. Considérons par exemple la fonction

$$f(x) = \sqrt{\sin x - \sin x_0},$$

dont la dérivée $f'(x)$ devient infinie pour $x = x_0$ et à laquelle, en conséquence, la formule de Taylor n'est pas applicable.

La fonction $\sin x - \sin x_0$ est développable par la formule de Taylor, et l'on a

$$f(x) = \sqrt{(x-x_0)\cos x_0 - \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\sin x_0 - \ldots};$$

il en résulte que la fonction

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x-x_0}}$$

a pour limite $\sqrt{\cos x_0}$ quand x tend vers x_0. Ainsi, en conservant les notations du numéro précédent, on a d'abord

$$n = \frac{1}{2},\quad A = \sqrt{\cos x_0},\quad f_1(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x-x_0}},$$

puis

$$(x-x_0)^{n_1-\frac{1}{2}}f_2(x)=\sqrt{\cos x_0-\frac{x-x_0}{1.2}\sin x_0-\ldots}-\sqrt{\cos x_0}$$

$$=\frac{-\frac{x-x_0}{1.2}\sin x_0-\ldots}{\sqrt{\cos x_0-\frac{x-x_0}{1.2}\sin x_0-\ldots}+\sqrt{\cos x_0}};$$

cette expression est un infiniment petit du premier ordre; on a

$$n_1=\frac{3}{2},\quad A_1=-\frac{\sin x_0}{4\sqrt{\cos x_0}}$$

et

$$f_2(x)=\frac{-\frac{1}{1.2}\sin x_0-\frac{x-x_0}{1.2.3}\cos x_0+\ldots}{\sqrt{\cos x_0-\frac{x-x_0}{1.2}\sin x_0+\ldots}+\sqrt{\cos x_0}}.$$

Si l'on veut borner le développement à deux termes, on aura

$$\sqrt{\sin x-\sin x_0}=\sqrt{\cos x_0}(x-x_0)^{\frac{1}{2}}-\frac{\sin x_0}{4\sqrt{\cos x_0}}(x-x_0)^{\frac{3}{2}}+R_2;$$

le reste R_2 a pour valeur

$$R_2=(x-x_0)^{\frac{3}{2}}\left[f_2(x)+\frac{\sin x_0}{4\sqrt{\cos x_0}}\right],$$

et son ordre infinitésimal est évidemment supérieur à $\frac{3}{2}$.

Détermination de la limite vers laquelle tend le rapport de deux fonctions qui tendent l'une et l'autre vers zéro ou vers l'infini.

124. Lorsqu'une fonction se présente sous une forme fractionnaire $\frac{f(x)}{F(x)}$, il peut arriver que le numérateur et

le dénominateur s'annulent simultanément ou deviennent infinis pour une valeur particulière x_0 de x. Il s'agit alors de déterminer la véritable valeur de la fonction, et l'on peut y parvenir dans des cas nombreux, au moyen du théorème suivant :

Théorème. — *Si les deux fonctions $f(x)$ et $F(x)$ tendent l'une et l'autre vers zéro ou vers l'infini, quand x tend vers la limite x_0, et que les dérivées de ces fonctions soient déterminées, les rapports*

$$\frac{f(x)}{F(x)}, \quad \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

tendront vers une même limite déterminée, quand on fera tendre x vers x_0, ou ils croîtront l'un et l'autre au delà de toute limite.

1° Supposons que l'on ait $f(x_0)=0$, $F(x_0)=0$. On peut toujours trouver une quantité h assez petite pour que $F'(x)$ ne soit ni nulle ni infinie quand x varie entre x_0 et x_0+h, si ce n'est pour $x=x_0$; alors on aura (n° 14)

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)}.$$

La quantité h_1 est comprise entre 0 et h, elle s'annule donc avec h, et par conséquent on a

$$\lim\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\frac{f'(x)}{F'(x)} \quad \text{pour } x=x_0;$$

il peut arriver que le rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$ croisse au delà de toute limite, et, dans ce cas, le rapport $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ croîtra aussi au delà de toute limite.

Ce résultat subsiste quelque grande que soit la quan-

tité x_0, et par conséquent il a lieu pour $x_0 = \infty$. Mais, comme la formule qui a servi de point de départ suppose que x_0 désigne une valeur finie, il n'est pas hors de propos d'examiner à part le cas de $x_0 = \infty$. En faisant $x = \frac{1}{z}$, on a

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Si x tend vers l'infini, z tendra vers zéro, et l'on aura

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim \frac{-\frac{1}{z^2} f'\left(\frac{1}{z}\right)}{-\frac{1}{z^2} F'\left(\frac{1}{z}\right)},$$

ou, en remettant x au lieu de $\frac{1}{z}$,

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)} \quad \text{pour } x = \infty.$$

2° Supposons que l'on ait $f(x_0) = \infty$, $F(x_0) = \infty$, x_0 étant une quantité finie ou infinie. On peut écrire

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\left[\frac{1}{F(x)}\right]}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]},$$

et, puisque les fonctions $\frac{1}{F(x)}$, $\frac{1}{f(x)}$ s'annulent pour $x = x_0$, on aura, par ce qui précède,

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{\left[\frac{F'(x)}{F^2(x)}\right]}{\left[\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right]} = \lim \frac{\left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]^2}{\left[\frac{f'(x)}{F'(x)}\right]}.$$

Si $\frac{f(x)}{F(x)}$ tend vers une limite finie A différente de zéro, la formule précédente deviendra

$$A = \frac{A^2}{\lim \frac{f'(x)}{F'(x)}},$$

et, par conséquent, on a

$$\lim \frac{f'(x)}{F'(x)} = A = \lim \frac{f(x)}{F(x)}.$$

La même conclusion subsiste quand $A = 0$. En effet, dans ce cas, si l'on désigne par C une constante quelconque, la fonction

$$\frac{f(x)}{F(x)} + C \quad \text{ou} \quad \frac{f(x) + CF(x)}{F(x)}$$

tendra vers la limite C quand x tendra vers x_0, et, comme C n'est pas nulle, on aura

$$\lim \frac{f(x) + CF(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x) + CF'(x)}{F'(x)},$$

ou, en retranchant C de chaque membre,

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Enfin, si le rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$ croît au delà de toute limite quand x tend vers x_0, le rapport inverse $\frac{F(x)}{f(x)}$ tendra vers la limite zéro; donc $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ tendra aussi vers zéro, et, en conséquence, $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ croîtra au delà de toute limite.

Corollaire. — *Si les fonctions* $f(x)$ *et* $F(x)$ *sont*

simultanément nulles ou infinies pour $x = x_0$, ainsi que leurs dérivées jusqu'à celle de l'ordre $n-1$ inclusivement, en sorte que la dérivée d'ordre n de l'une des fonctions au moins ait une valeur finie différente de zéro, on aura pour $x = x_0$,

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{F^{(n)}(x_0)}.$$

125. Exemples. — 1° Les deux termes de chacune des fractions

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\operatorname{tang} x}{x}$$

s'annulent pour $x = 0$. En appliquant le précédent théorème, on a

$$\lim \frac{\sin x}{x} = \lim \frac{\cos x}{1} = 1,$$

$$\lim \frac{\operatorname{tang} x}{x} = \lim \frac{1}{\cos^2 x} = 1.$$

2° Soit la fraction

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

Chaque terme s'annule pour $x = 0$, ainsi que ses deux premières dérivées. Les dérivées du troisième ordre sont respectivement

$$e^x + e^{-x}, \quad \cos x,$$

et elles se réduisent à 2 et 1 pour $x = 0$. La fraction proposée est donc égale à 2 pour cette valeur de x.

3° Soit la fraction

$$\frac{x^x - x}{x - 1 - \log x},$$

où la caractéristique log exprime un logarithme népérien. Les deux termes s'annulent pour $x = 1$, ainsi que

leurs dérivées du premier ordre,

$$x^x(1+\log x)-1, \quad 1-\frac{1}{x};$$

les dérivées du deuxième ordre sont

$$x^x(1+\log x)^2+x^{x-1}, \quad \frac{1}{x^2},$$

elles se réduisent à 2 et 1 pour $x=1$; donc la fraction proposée tend vers la limite 2 quand x tend vers l'unité.

4° Soit la fraction $\frac{a^x}{x^n}$, a étant une constante positive et n un nombre entier positif. Les deux termes de cette fraction sont infinis pour $x=\infty$; d'ailleurs le rapport des dérivées d'ordre n des fonctions a^x et x^n est

$$\frac{\log^n a}{1.2\ldots n}a^x$$

et il devient infini en même temps que x; par conséquent, la fonction $\frac{a^x}{x^n}$ tend elle-même vers l'infini, quel que soit n, quand x tend vers l'infini.

126. Il existe des fonctions qui deviennent indéterminées pour des valeurs particulières de la variable. Telles sont, par exemple, les fonctions $\sin x$, $\cos x$, dont les valeurs sont indéterminées pour $x=\infty$. Il peut arriver aussi qu'une fonction dont la valeur est déterminée pour $x=x_0$ ait une dérivée indéterminée; ainsi les fonctions $x+\cos x$, $x+\sin x$ deviennent infinies avec x, mais leurs dérivées $1-\sin x$, $1+\cos x$ sont indéterminées. Si donc on fait

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{x+\cos x}{x+\sin x}=\frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}},$$

on aura

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = 1, \quad \text{pour } x = \infty,$$

tandis que la limite du rapport $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ est indéterminée. Ce résultat n'est point en contradiction avec le théorème du n° 124, car celui-ci suppose essentiellement que les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ aient des dérivées déterminées.

127. Le théorème du n° 124 ramène la recherche de la valeur que prend $\frac{f(x)}{F(x)}$ pour $x = x_0$ à celle de la valeur que prend, dans les mêmes circonstances, la nouvelle fonction $\frac{f'(x)}{F'(x)}$. Mais il peut arriver que cette réduction n'ait point d'avantage et que la seconde fonction offre les mêmes difficultés que la première.

La solution de la question qu'il s'agit de résoudre s'obtiendra sans difficulté, si les fonctions $f(x_0 + h)$, $F(x_0 + h)$ sont développables en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes positives ou négatives, entières ou fractionnaires de h. Dans ce cas, il suffira de calculer le premier terme Ah^n de la première série, ainsi que le premier terme Bh^m de la seconde, car on aura

$$f(x_0 + h) = h^n (A + \varepsilon),$$
$$F(x_0 + h) = h^m (B + \eta),$$

ε et η étant infiniment petits en même temps que h, puis

$$\frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = h^{n-m} \frac{A + \varepsilon}{B + \eta}.$$

Si n est égal à m, on aura

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{B},$$

et le rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$ tendra vers zéro ou vers l'infini, si l'on a $n > m$ ou $n < m$.

128. Exemple I. — Considérons la fonction fractionnaire

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0} + \sqrt{x - x_0}}{\sqrt{x^2 - x_0^2}};$$

les deux fonctions $f(x)$, $F(x)$ s'annulent pour $x = x_0$, et il est aisé de reconnaître que leurs dérivées de tous les ordres sont infinies pour $x = x_0$. Si l'on fait $x = x_0 + h$, et qu'on prenne h pour infiniment petit principal, $\sqrt{x - x_0} = \sqrt{h}$ sera un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2}$; au contraire $\sqrt{x} - \sqrt{x_0}$ ou $\sqrt{x_0}\left[\sqrt{1 + \frac{h}{x_0}} - 1\right]$ est un infiniment petit du premier ordre, ainsi qu'on s'en assure en faisant usage de la formule du binôme. On a donc

$$f(x_0 + h) = \sqrt{h}(1 + \varepsilon),$$

ε étant un infiniment petit. Le dénominateur $F(x)$ est $\sqrt{x - x_0}\sqrt{x + x_0} = \sqrt{h}\sqrt{2x_0 + h}$, et l'on a

$$F(x_0 + h) = \sqrt{h}(\sqrt{2x_0} + \eta),$$

η étant un infiniment petit; donc

$$\frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{2x_0} + \eta}, \quad \lim \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{2x_0}}.$$

129. Exemple II. — Soit la fonction

$$\frac{x - \frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{3}\operatorname{tang} x}{x^5},$$

et cherchons sa valeur pour $x = 0$. Si l'on multiplie par

$3\cos x$ ses deux termes, elle deviendra

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{3x\cos x - \sin x - \sin 2x}{3x^5\cos x};$$

en remplaçant $\cos x$, $\sin x$ et $\sin 2x$ par leurs développements en séries, on trouve

$$f(x) = 3x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots\right)$$
$$- \left(2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} - \ldots\right),$$
$$F(x) = 3x^5\left(1 - \frac{x^2}{2} + \ldots\right),$$

d'où

$$f(x) = x^5\left(-\frac{3}{20} + \varepsilon\right),\quad F(x) = x^5(3 + \eta);$$

on en conclut

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = -\frac{1}{20}.$$

130. L'analyse que nous venons de développer embrasse le cas d'une fonction égale à un produit $f(x)\,F(x)$ de deux facteurs, dont l'un est nul et l'autre infini pour $x = x_0$. On a effectivement

$$f(x)\,F(x) = \frac{f(x)}{[F(x)]^{-1}} \quad \text{ou} \quad f(x)\,F(x) = \frac{F(x)}{[f(x)]^{-1}},$$

et la forme de la fonction est ainsi celle d'une fraction dont les termes deviennent nuls ou infinis pour $x = x_0$.

Enfin on ramène immédiatement au cas précédent celui d'une fonction y de la forme

$$y = u^v,$$

u et v étant des fonctions de x qui, pour $x = x_0$, se réduisent à

$$u = 0,\quad v = 0,$$

ou à

$$u = \infty, \quad v = 0,$$

ou à

$$u = 1, \quad v = \infty.$$

En prenant les logarithmes des deux membres de la formule précédente, on a

$$\log y = v \times \log u.$$

La fonction $\log y$ est le produit de deux fonctions, dont l'une s'annule pour $x = x_0$, tandis que l'autre devient infinie; on rentre ainsi dans le cas que nous venons d'examiner.

131. Exemple. — Cherchons la valeur de x^x pour $x = 0$. On a

$$\log x^x = x \log x = \frac{\log x}{x^{-1}},$$

donc

$$\lim \log x^x = \lim \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim x = 0.$$

Le logarithme de x^x tend donc vers zéro, et par conséquent x^x tend vers l'unité.

Représentation des fonctions e^x et $\log x$ par des limites de fonctions algébriques.

132. Soient x une quantité déterminée et m une variable. On peut obtenir, par les règles précédentes, la valeur que prend l'expression

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

pour $m = \infty$. On a effectivement

$$\log\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = m\log\left(1+\frac{x}{m}\right) = \frac{\log\left(1+\frac{x}{m}\right)}{\frac{1}{m}}.$$

La limite de cette expression, pour $m=\infty$, s'obtiendra en prenant le quotient des dérivées des fonctions $\log\left(1+\frac{x}{m}\right)$, $\frac{1}{m}$ par rapport à m et en cherchant la limite de ce quotient. On a ainsi

$$\lim\log\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \lim\frac{-\frac{x}{m^2}}{\left(1+\frac{x}{m}\right)\left(\frac{-1}{m^2}\right)} = \lim\frac{x}{1+\frac{x}{m}} = x,$$

ou

$$e^x = \lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m \quad \text{pour } m=\infty;$$

et, par conséquent, la fonction transcendante e^x est la limite d'une expression qui reste algébrique et même entière, si le nombre m tend vers l'infini, en ne prenant que des valeurs entières. On peut écrire aussi

$$(1) \qquad e^x = \left(1+\frac{x}{m}\right)^m + \varepsilon,$$

en désignant par ε une quantité infiniment petite avec $\frac{1}{m}$.

On tire de cette formule (1)

$$x = m\left(\sqrt[m]{e^x-\varepsilon}-1\right);$$

or on a

$$\sqrt[m]{e^x-\varepsilon} = \sqrt[m]{e^x}\left(1-\varepsilon e^{-x}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{e^x}\left(1-\frac{\varepsilon}{m}e^{-x}+\ldots\right)$$

d'où

$$m\sqrt[m]{e^x-\varepsilon} = m\sqrt[m]{e^x}+\eta,$$

η étant un infiniment petit : donc

$$x = m(\sqrt[m]{e^x} - 1) + \eta,$$

et si l'on écrit x au lieu de e^x, $\log x$ au lieu de x, il viendra

$$(2) \qquad \log x = m(\sqrt[m]{x} - 1) + \eta,$$

ou

$$\log x = \lim m(\sqrt[m]{x} - 1) \quad \text{pour } m = \infty;$$

par conséquent la fonction transcendante $\log x$ est aussi la limite d'une fonction algébrique de la variable x.

Extension des formules de Taylor et de Maclaurin aux fonctions de plusieurs variables.

133. Soit

$$u = \mathrm{F}(x, y, z, \ldots)$$

une fonction de m variables indépendantes $x, y, z, \ldots$. Nous nous proposons de développer la fonction

$$u + \Delta u = \mathrm{F}(x + h, y + k, z + l, \ldots)$$

en série ordonnée par rapport aux accroissements h, k, $l, \ldots$. La quantité $u + \Delta u$ est la valeur que prend, pour $t = 1$, la fonction de t suivante :

$$\mathrm{U} = \mathrm{F}(x + ht, y + kt, z + lt, \ldots),$$

qu'on obtient en remplaçant $h, k, l, \ldots$ par $ht, kt, lt, \ldots$ respectivement dans l'expression de $u + \Delta u$; donc, pour résoudre la question proposée, il suffira de développer U en série ordonnée par rapport aux puissances de t, d'après la formule de Maclaurin, et de faire ensuite $t = 1$ dans le résultat.

Si l'on pose

$$+ ht = \xi, \quad y + kt = \eta, \quad z + lt = \zeta, \ \ldots,$$

on aura

$$U = F(\xi, \eta, \zeta, \ldots),$$

d'où

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta} d\zeta + \ldots;$$

puis comme $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ sont des fonctions linéaires de la variable indépendante t, on aura symboliquement (65), quel que soit n,

$$d^n U = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta} d\zeta + \ldots\right)^n.$$

On a $d\xi = h\,dt$, $d\eta = k\,dt$, $d\zeta = l\,dt$, ...; donc

$$\frac{d^n U}{dt^n} = \left(h \frac{\partial U}{\partial \xi} + k \frac{\partial U}{\partial \eta} + l \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \ldots\right)^n,$$

et, à cause de $\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial x}, \ldots$, on peut écrire

$$\frac{d^n U}{dt^n} = \left(h \frac{\partial U}{\partial x} + k \frac{\partial U}{\partial y} + l \frac{\partial U}{\partial z} + \ldots\right)^n.$$

Pour $t = 0$, on a

$$U = u,$$

et la formule précédente se réduit à

$$\frac{d^n U}{dt^n} = \left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} + \ldots\right)^n.$$

Par conséquent la formule de Maclaurin appliquée à la fonction U donnera

$$\begin{aligned} U = u &+ \frac{t}{1}\left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} + \ldots\right) \\ &+ \frac{t^2}{1.2}\left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} + \ldots\right)^2 + \ldots \\ &+ \frac{t^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} + \ldots\right)^{n-1} + R_n. \end{aligned}$$

Le reste R_n est égal au produit de $\frac{t^n}{1.2\ldots n}$ par la valeur que prend $\frac{d^n U}{dt^n}$ quand on y remplace t par θt, θ désignant une quantité comprise entre zéro et 1; on a donc

$$R_n = \frac{t^n}{1.2\ldots n}\left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots\right)^n_{x+\theta ht,\ y+\theta kt,\ z+\theta lt,\ldots},$$

les indices $x+\theta ht$, $y+\theta kt$, $z+\theta lt$, ... indiquant qu'il faut remplacer $x, y, z, \ldots$ par $x+\theta ht$, $y+\theta kt$, $z+\theta lt$, ...

Si maintenant on fait $t = 1$, on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} u + \Delta u = u &+ \frac{\left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots\right)}{1} \\ &+ \frac{\left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots\right)^2}{1.2} + \ldots \\ &+ \frac{\left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots\right)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + R_n \end{aligned}\right.$$

et

$$(2)\quad R_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots\right)^n_{x+\theta h,\ y+\theta k,\ z+\theta l,\ldots}.$$

Par exemple, dans le cas d'une fonction $F(x, y)$ de deux variables, on aura

$$\begin{aligned} &F(x+h, y+k) \\ &= F(x,y) + \left(h\frac{\partial F}{\partial x} + k\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{1}{1.2}\left(h^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + k^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left(h^{n-1}\frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}} + \frac{n-1}{1}h^{n-2}k\frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-2}\,\partial y} + \ldots + k^{n-1}\frac{\partial^{n-1} F}{\partial y^{n-1}}\right) \\ &\quad + R_n, \end{aligned}$$

et l'expression du reste sera

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left(h^n\frac{\partial^n F}{\partial x^n} + \frac{n}{1}h^{n-1}k\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1}\,\partial y} + \ldots + k^n\frac{\partial^n F}{\partial y^n}\right)_{x+\theta h,\ y+\theta k}.$$

Lorsque le reste R_n tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment, la formule (1) donne celle de Taylor étendue au cas des fonctions de plusieurs variables, savoir :

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta u = & \frac{h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots}{1} \\ & + \frac{\left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots\right)^2}{1.2} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Or, $x, y, z, \ldots$ étant des variables indépendantes, on a

$$du = h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots,$$

et, symboliquement,

$$d^n u = \left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots\right)^n;$$

donc la formule (3) peut s'écrire

$$(4)\qquad \Delta u = \frac{du}{1} + \frac{d^2 u}{1.2} + \frac{d^3 u}{1.2.3} + \ldots,$$

et elle a la même forme (108) que dans le cas d'une seule variable.

134. Si l'on se reporte aux conditions que suppose la formule de Maclaurin dans le cas d'une seule variable, on reconnaîtra que notre formule (1) exige que la fonction u et ses dérivées partielles, jusqu'à celles de l'ordre $n-1$, soient continues relativement à chacune des variables, tant que celles-ci restent comprises respectivement entre x et $x+h$, y et $y+k$, z et $z+l$, ...; elle exige en outre que les dérivées partielles de l'ordre n soient déterminées.

Lorsque les accroissements h, k, l, ... sont infiniment petits et que leurs rapports demeurent indéterminés, le rapport du reste au terme auquel on s'arrête est infiniment petit, pourvu que ce dernier terme ne soit pas identiquement nul. En effet, les dérivées partielles de u étant supposées continues jusqu'à celles de l'ordre $n-1$ inclusivement, on a

$$R_{n-1} = \frac{d'^{n-1}u}{1.2\ldots(n-1)},$$

en désignant par $d'^{n-1}u$ ce que devient la différentielle $d^{n-1}u$ quand on remplace x, y, z, ... par $x+\theta h$, $y+\theta k$, $z+\theta l$, ...; d'ailleurs on a aussi

$$R_{n-1} = \frac{d^{n-1}u}{1.2\ldots(n-1)} + R_n,$$

donc

$$\frac{\dfrac{R_n}{d^{n-1}u}}{1.2\ldots n} = \frac{d'^{n-1}u - d^{n-1}u}{d^{n-1}u},$$

et le second membre de cette formule s'annule avec h, k, l, ... tant que les limites des rapports de ces infiniment petits à l'un d'eux restent indéterminées et que $d^{n-1}u$ ne se réduit pas identiquement à zéro.

Il résulte de là que, si des valeurs absolues de saccroissements h, k, l, ... sont suffisamment petites, la valeur absolue de R_n sera inférieure à la valeur absolue du dernier terme $\dfrac{d^{n-1}u}{1.2\ldots u}$.

135. Maintenant, pour avoir la formule de Maclaurin étendue aux fonctions de plusieurs variables, supposons x, y, z, ... nulles dans les formules (1) et (2), puis écrivons ensuite x, y, z,... au lieu de h, k, l, ... Exprimons enfin par le moyen de l'indice zéro que x, y, z, ... doivent être

remplacés par zéro dans une fonction quelconque, et par l'indice θ que les mêmes variables doivent être remplacées par θx, θy, θz, ...; on aura

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} u = u_0 &+ \frac{x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + \ldots}{1} \\ &+ \frac{\left[x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + \ldots\right]^2}{1.2} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{\left[x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + \ldots\right]^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + R_n \end{aligned}\right.$$

et

$$(6)\quad R_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\left[x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\theta + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_\theta + z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_\theta + \ldots\right]^n.$$

Théorème relatif aux fonctions homogènes.

136. Le théorème que j'ai en vue a été déjà démontré au n° 84; mais, comme il a une haute importance, il ne sera pas inutile d'en présenter ici une démonstration nouvelle.

Soit

$$f(x, y, z, \ldots)$$

une fonction homogène du degré n des variables $x, y, z, \ldots$. Si l'on multiplie toutes ces variables par le facteur $1+\alpha$, la fonction se trouvera multipliée par $(1+\alpha)^n$ et l'on aura (84)

$$f(x+\alpha x,\ y+\alpha y,\ z+\alpha z, \ldots) = (1+\alpha)^n f(x, y, z, \ldots).$$

Développons les deux membres de cette formule en série

ordonnée suivant les puissances de α. Le premier membre donnera

$$f(x, y, z, \ldots) + \alpha\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{\alpha^2}{1.2}\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2xz\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \ldots + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \ldots\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Quant au second membre, il deviendra

$$f(x, y, z, \ldots)\left[1 + \frac{n}{1}\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2 + \ldots\right],$$

et la série qu'il renferme sera convergente si l'on prend pour l'arbitraire α une quantité positive inférieure à 1.

En égalant de part et d'autre les coefficients des mêmes puissances de α, on obtient

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + \ldots = nf(x, y, z, \ldots),$$
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \ldots = n(n-1)f(x, y, z, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La première de ces formules exprime la propriété des fonctions homogènes que nous voulions établir; elle entraîne toutes celles qui suivent, comme il est facile de s'en assurer.

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES MAXIMA ET MINIMA.

Des maxima et des minima des fonctions d'une seule variable.

137. Soient $f(x)$ une fonction de la variable x et x_0 une valeur particulière de x. Si l'on peut assigner une quantité positive ε, aussi petite d'ailleurs que l'on voudra, telle que l'on ait

$$f(x_0+h) < f(x_0)$$

pour toutes les valeurs de h comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, on dit que la fonction $f(x)$ passe par un *maximum* quand x atteint la valeur x_0, et $f(x_0)$ est dite une valeur *maxima* de $f(x)$.

Pareillement, si l'on a

$$f(x_0+h) > f(x_0)$$

pour toutes les valeurs de h comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, on dit que la fonction $f(x)$ passe par un *minimum* quand x atteint la valeur x_0, et $f(x_0)$ est une valeur *minima* de $f(x)$.

Lorsqu'on fait croître x, la fonction $f(x)$ croît ou décroît, selon que la dérivée $f'(x)$ est positive ou négative; il en résulte que la fonction $f(x)$ ne peut cesser de décroître pour croître, ou de croître pour décroître, que quand $f'(x)$ change de signe; alors cette dérivée s'annule, à moins qu'elle ne devienne discontinue. Ainsi les valeurs de x qui répondent aux maxima et aux minima de $f(x)$

sont comprises parmi celles qui annulent la dérivée $f'(x)$ ou qui la rendent discontinue. On voit aussi qu'une fonction peut avoir plusieurs maxima et plusieurs minima qui se succèdent alternativement, du moins tant que $f(x)$ reste finie.

138. Exemples. — 1° Considérons en premier lieu la fonction

$$f(x) = x(a-x),$$

on a ici

$$f'(x) = a - 2x;$$

la dérivée $f'(x)$ s'annule pour $x = \frac{a}{2}$ et elle passe du positif au négatif quand x croît de $\frac{a}{2} - \varepsilon$ à $\frac{a}{2} + \varepsilon$; donc la fonction $f(x)$ va d'abord en croissant et elle décroît ensuite; par conséquent, elle passe par un maximum quand x devient égale à $\frac{a}{2}$; la valeur maxima de la fonction est $\frac{a^2}{4}$.

2° Considérons en second lieu la fonction

$$f(x) = (x-a)^{\frac{2}{3}} + b;$$

on a

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-a)^{-\frac{1}{3}}.$$

La dérivée $f'(x)$ ne s'annule que pour $x = \infty$; mais elle devient discontinue en passant par l'infini, pour $x = a$, et il est évident que cette valeur a répond à un minimum de la fonction $f(x)$.

139. La formule de Taylor conduit au résultat qui précède, et elle permet en outre de le compléter. Nous supposerons ici que les dérivées que nous aurons à considérer restent continues entre des limites voisines des

valeurs qui répondent aux maxima et aux minima; les cas de discontinuité doivent être examinés à part, dans chaque question particulière.

Nous désignons par R_n, comme nous l'avons fait dans le Chapitre précédent, le reste de la série de Taylor correspondant au terme de rang n, et nous rappellerons qu'on peut toujours supposer l'accroissement h de la variable x assez petit en valeur absolue pour que la valeur absolue du reste soit moindre que celle du dernier terme, quand celui-ci ne se réduit pas à zéro (109).

Cela posé, soit $f(x)$ la fonction donnée, on a

$$(1) \qquad f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0)+R_2;$$

donc, si $f'(x_0)$ n'est pas nulle, la différence

$$f(x_0+h)-f(x_0)$$

changera de signe avec h, et la valeur $f(x_0)$ ne sera ni un maximum ni un minimum. Supposons donc

$$f'(x_0)=0;$$

alors on aura, par la formule de Taylor,

$$(2) \qquad f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)+R_3,$$

et le premier membre aura le signe de $f''(x_0)$ pour toutes les valeurs de h comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, ε étant suffisamment petit; donc $f(x_0)$ sera une valeur maxima ou une valeur minima, suivant que l'on aura

$$f''(x_0)<0 \quad \text{ou} \quad f''(x_0)>0.$$

Mais si l'on a

$$f''(x_0)=0,$$

la formule (2) ne nous apprend plus rien.

Supposons généralement que l'on ait

$$f'(x_0)=0,\quad f''(x_0)=0,\quad \ldots,\quad f^{(n-1)}(x_0),$$

et que la $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}(x)$ ne s'annule pas pour $x=x_0$. Alors la formule de Taylor donnera

$$(3)\qquad f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x_0)+R_{n+1}.$$

Cette formule (3) nous montre que, si n est impair, la différence $f(x_0+h)-f(x_0)$ changera de signe avec h, et, par conséquent, il n'y aura ni maximum ni minimum pour $x=x_0$. Au contraire, si n est impair, la même différence conservera le signe de $f^{(n)}(x_0)$ quand h passera du négatif au positif, et, dans ce cas, $f(x_0)$ sera maximum ou minimum suivant que l'on aura

$$f^{(n)}(x_0)<0 \quad \text{ou} \quad f^{(n)}(x_0)>0.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Pour que la fonction $f(x)$ ait une valeur maxima ou minima répondant à la valeur x_0 de x, il faut et il suffit que la première des dérivées de $f(x)$ qui ne s'annulent pas pour $x=x_0$ soit d'ordre pair. Alors, il y a maximum ou minimum, suivant que la valeur de cette dérivée pour $x=x_0$ est négative ou positive.

Application à quelques exemples.

140. Exemple I. — *Trouver le minimum de la fonction x^x.*

Posant

$$y=x^x,\quad \text{d'où}\quad \log y=x\log x,$$

il vient, en différentiant,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\log x+1,$$

puis, en différentiant de nouveau,

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x}.$$

La condition commune du maximun et du minimum est $\frac{dy}{dx} = 0$, ou

$$\log x + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1}{e};$$

on a ensuite, pour cette valeur de x,

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = e,$$

et, puisque $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positive, la valeur $\frac{1}{e}$ répond à un minimum; il est évident qu'il n'y a pas ici de maximum. L'expression précédente de $\frac{dy}{dx}$ montre que cette dérivée s'annule pour $x = \frac{1}{e}$ en passant du négatif au positif, en sorte qu'il n'était pas nécessaire de former l'expression de $\frac{d^2y}{dx^2}$ pour conclure l'existence du minimum.

141. Exemple II. — *Trouver les valeurs maxima et minima de la fonction $x^m(a-x)^n$, dans laquelle a désigne une constante positive donnée, et où m et n sont des entiers positifs.*

Posant

$$y = x^m(a-x)^n,$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma - (m+n)x].$$

On voit que, x croissant, la dérivée $\frac{dy}{dx}$ s'annule pour $x = \frac{ma}{m+n}$ en passant du positif au négatif; donc la fonc-

tion y devient maxima pour

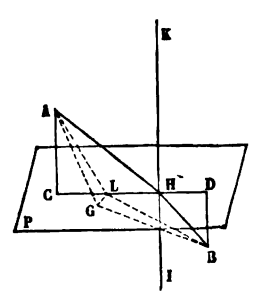
$$x = \frac{ma}{m+n}, \quad a - x = \frac{na}{m+n},$$

ce qui donne

$$\frac{x}{m} = \frac{a-x}{n}.$$

La dérivée $\frac{dy}{dx}$ s'annule aussi pour $x = 0$ si m est > 1, et pour $x = a$ si n est > 1. Mais, en s'annulant, elle ne change de signe que si l'exposant m ou n est pair; elle passe alors du négatif au positif. La fonction y est donc minima pour $x = 0$, quand m est pair, et pour $x = a$, quand n est pair.

142. Exemple III (Problème de Fermat). — *Deux milieux étant séparés par un plan* P, *on demande le chemin que doit suivre un mobile pour aller, dans le temps le plus court, d'un point donné* A *du premier milieu à un point donné* B *du second. Le mobile se meut dans le premier milieu avec la vitesse constante u, et dans le second milieu avec la vitesse constante v.*



Le chemin demandé se compose de deux lignes droites, puisque l'espace parcouru par le mobile, dans l'un ou l'autre milieu, est proportionnel au temps employé. En outre, ce chemin est situé dans le plan ACDB mené per-

pendiculairement au plan P par les points donnés A et B et qui coupe celui-ci suivant la ligne CD; en effet, considérons la ligne brisée AGB, située hors du plan ACDB, et du point G où elle rencontre le plan P, abaissons GL perpendiculaire sur CD, les droites AL et LB seront respectivement moindres que AG et GB; par conséquent, le temps pour suivre le chemin ALB sera moindre que le temps nécessaire pour aller de A en B par le chemin AGB.

Cela posé, désignons par a et b les perpendiculaires AC, BD abaissées des points A et B sur le plan P, par c la distance CD et par x la distance du point C à un point quelconque H de CD; on aura

$$AH = \sqrt{x^2 + a^2}, \quad BH = \sqrt{(c-x)^2 + b^2};$$

donc le temps t que le mobile emploiera pour aller de A en B, par le chemin AHB, sera

$$(1) \qquad t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{v};$$

telle est la fonction de x dont on demande le minimum. Il est évident que la question ne comporte pas de maximum.

En égalant à zéro la dérivée de la fonction t, il vient

$$(2) \qquad \frac{1}{u}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v}\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}} = 0,$$

ou, en faisant disparaître les radicaux,

$$(v^2 - u^2)x^2(c-x)^2 + b^2v^2x^2 - a^2u^2(c-x)^2 = 0;$$

ainsi l'inconnue x dépend d'une équation du quatrième degré. Mais, sans résoudre cette équation, on peut obtenir comme il suit la propriété géométrique qui caractérise la ligne demandée. A cet effet, menons la ligne KI per-

pendiculaire en H au plan P; désignons par i l'angle AHK et par r l'angle IHB, on aura

$$\sin r = \frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{BH}} = \frac{c - x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}};$$

$$\sin i = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AH}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}},$$

et, par conséquent, l'équation (2), qui exprime la condition du minimum, deviendra

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u}{v}.$$

Il résulte de là que le sinus de l'angle d'*incidence* i est au sinus de l'angle de *réfraction* r dans le rapport des vitesses u et v avec lesquelles le mobile peut se mouvoir dans le premier et dans le second milieu, respectivement.

143. EXEMPLE IV. — *Trouver les maxima et les minima de la distance d'un point donné à une courbe donnée.*

Désignons par x_0 et y_0 les coordonnées du point donné relatives à deux axes rectangulaires; par x et y les coordonnées de la courbe donnée. L'ordonnée y est une fonction donnée de x, et le carré de la distance du point (x_0, y_0) au point (x, y) est

$$\text{(1)} \qquad V = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2;$$

il s'agit d'avoir les valeurs maxima et minima de la fonction de x représentée par V.

On a

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{dV}{dx} = (x - x_0) + (y - y_0)\dfrac{dy}{dx}, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2V}{dx^2} = \left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right) + (y - y_0)\dfrac{d^2y}{dx^2}. \end{cases}$$

La condition $\frac{dV}{dx} = 0$ du maximum ou du minimum est ici

$$(3) \qquad (x - x_0) + (y - y_0)\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou

$$\frac{y - y_0}{x - x_0}\frac{dy}{dx} = -1.$$

$\frac{y - y_0}{x - x_0}$ est le coefficient d'inclinaison de la droite qui joint le point donné M_0 au point demandé M de la courbe donnée, $\frac{dy}{dx}$ est le coefficient d'inclinaison de la tangente en M à la même courbe. Donc l'équation précédente exprime que la droite qui joint le point donné au point cherché est *normale* à la courbe.

Soit M l'un des points ainsi déterminés par l'équation (3); ce point répondra à un minimum ou à un maximum, suivant que $\frac{d^2V}{dx^2}$ sera positive ou négative. Mais, si $\frac{d^2V}{dx^2}$ est nulle, il faudra recourir aux dérivées des ordres supérieurs pour décider s'il y a maximum ou minimum, ou s'il n'y a ni l'un ni l'autre. Ce dernier cas se présentera en particulier si, $\frac{d^2V}{dx^2}$ étant nulle pour le point M, la valeur de $\frac{d^3V}{dx^3}$ est différente de zéro.

La droite M_0M ayant été menée, supposons que le point donné M_0 prenne toutes les positions possibles sur cette normale, il y aura une position M' du point M_0 pour laquelle la dérivée $\frac{d^2V}{dx^2}$ sera nulle; par conséquent, si l'on nomme x', y' les coordonnées de M' on aura

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - y')\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

et la deuxième équation (2) pourra alors se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2} = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\left(\frac{y_0 - y'}{y - y'}\right).$$

Cela montre que la valeur de M_0M sera un minimum ou un maximum, suivant que $y_0 - y'$ et $y - y'$ seront de même signe ou de signes contraires. En d'autres termes, il y aura minimum quand le point donné M_0 sera situé entre M' et M, maximum dans le cas contraire. Le point M' est, comme on le verra plus loin, ce qu'on nomme le *centre de courbure* de la courbe donnée au point M.

144. Supposons que la courbe donnée soit un cercle ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

on a, en différentiant cette équation,

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0, \quad \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) + y\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Alors l'équation (3) du numéro précédent devient

$$\frac{y}{y_0} - \frac{x}{x_0} = 0;$$

elle représente la droite qui joint le point donné au centre du cercle, et elle coupe la circonférence en deux points, dont l'un répond à un minimum, l'autre à un maximum. Effectivement le point désigné par M' est ici le centre du cercle donné, et l'on a

$$\frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{R^2 y_0}{y^3},$$

d'où il suit que $\frac{d^2V}{dx^2}$ est positif ou négatif, suivant que y_0 et y sont de même signe ou de signes contraires.

145. Si la courbe donnée est gauche ou si, cette courbe étant plane, le point donné M_0 n'est pas situé dans son plan, on emploiera trois coordonnées rectangulaires. Le carré de la distance du point donné M_0 à un point de la courbe sera

$$V = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

y et z étant des fonctions données de x, puis on aura

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dx} = (x - x_0) + (y - y_0)\frac{dy}{dx} + (z - z_0)\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2} = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right) + (y - y_0)\frac{d^2y}{dx^2} + (z - z_0)\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Les points x, y, z qui répondent au minimum ou au maximum sont donnés par l'équation $\frac{dV}{dx} = 0$, ou

$$(x - x_0) + (y - y_0)\frac{dy}{dx} + (z - z_0)\frac{dz}{dx} = 0,$$

à laquelle il faut joindre les deux équations de la courbe donnée. Si l'on regarde x_0, y_0, z_0 comme des coordonnées variables, x, y, z comme des quantités données, l'équation précédente sera celle d'un plan, et l'on verra plus loin que ce plan est *normal* à la courbe donnée, c'est-à-dire qu'il est perpendiculaire à la tangente menée par le point $M(x, y, z)$ où il rencontre la courbe.

Maintenant, pour distinguer le cas du minimum de celui du maximum, désignons par x', y', z' les coordonnées d'un point variable, remplaçons y_0 et z_0 par y' et z' dans l'expression de $\frac{d^2V}{dx^2}$ et égalons le résultat à zéro, on obtiendra l'équation

$$\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right) + (y - y')\frac{d^2y}{dx^2} + (z - z')\frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

qui sera celle d'un plan. Soit M' le point où ce plan coupe la droite M_0M, et supposons que x', y', z' représentent les coordonnées du point M', on aura

$$\frac{x-x_0}{x-x'}=\frac{y-y_0}{y-y'}=\frac{z-z_0}{z-z'}=\frac{(y-y_0)\frac{d^2y}{dx^2}+(z-z_0)\frac{d^2z}{dx^2}}{(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}+(z-z')\frac{d^2z}{dx^2}},$$

et, à cause de l'équation précédente,

$$(y-y_0)\frac{d^2y}{dx^2}+(z-z_0)\frac{d^2z}{dx^2}=-\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)\frac{x-x_0}{x-x'},$$

donc

$$\frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2}=\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)\frac{x_0-x'}{x-x'};$$

par conséquent on aura

$$\frac{d^2V}{dx^2}>0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2V}{dx^2}<0,$$

selon que x_0-x' et $x-x'$ seront de même signe ou de signes contraires. Il résulte de là que le minimum aura lieu si le point donné M_0 est situé entre M et M'; il y aura maximum dans le cas contraire.

Remarque sur les maxima et les minima relatifs.

146. On peut avoir besoin de connaître la plus grande et la plus petite des valeurs que prend une fonction $f(x)$ de la variable x quand x varie entre deux limites données a et b; un tel maximum ou minimum est dit un *maximum relatif* ou un *minimum relatif*. Pour résoudre la question il est nécessaire d'étudier les variations de la fonction $f(x)$ en faisant usage de sa dérivée. Si la dérivée reste finie et conserve son signe, quand x varie de a à b, le maximum et le minimum relatifs seront les valeurs

extrêmes $f(a)$ et $f(b)$. Lorsque la fonction $f(x)$ a plusieurs maxima et minima absolus, entre les limites considérées, le plus grand des maxima est dit le *maximum maximorum*, et le plus petit des minima le *minimum minimorum*; dans ce cas le *maximum maximorum* satisfera à la condition du maximum relatif, s'il surpasse toutefois les valeurs extrêmes $f(a)$, $f(b)$; pareillement, le *minimum minimorum* sera le *minimum relatif*, s'il est inférieur aux valeurs extrêmes.

Lorsqu'un problème a pour objet la détermination d'un maximum ou d'un minimum, et qu'on a fait un choix de variables tel, que la variable indépendante doive rester comprise entre certaines limites, il peut arriver que, pour la fonction dont on doit chercher le maximum ou le minimum, il n'y ait qu'un maximum relatif ou un minimum relatif.

Prenons pour exemple le problème que nous avons traité au n° **144** et dans lequel on demande de trouver la plus courte distance d'un point donné à une circonférence donnée. Faisons passer l'axe des abscisses par le point donné, il s'agit de trouver le maximum et le minimum de l'expression

$$V = (x - x_0)^2 + y^2.$$

Mais, par l'équation du cercle, y^2 est égal à $R^2 - x^2$; on a donc

$$V = (x - x_0)^2 + R^2 - x^2,$$

ou, en réduisant,

$$V = (R^2 + x_0^2) - 2x_0 x.$$

Il est évident que cette fonction V, qui est linéaire, n'a ni maximum absolu ni minimum absolu. Mais, dans notre question, l'équation du cercle $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ exige que la variable indépendante x reste comprise entre $-R$ et $+R$.

En supposant x_0 positif, le minimum relatif et le maximum relatif de V seront

$$(x_0 - R)^2 \quad \text{et} \quad (x_0 + R)^2;$$

les valeurs $x = -R$ et $x = +R$ donnent ainsi la solution du problème.

Cas des fonctions implicites d'une seule variable indépendante.

147. Considérons d'abord une fonction y liée à sa variable x par une équation donnée

$$(1) \qquad f(x, y) = 0.$$

En différentiant cette équation, il vient

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0;$$

la condition du maximum et du minimum exige d'abord que $\frac{dy}{dx}$ soit nulle; on aura donc

$$(3) \qquad \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0,$$

et si l'on cherche les systèmes de solutions communes (x_0, y_0), (x_1, y_1), ... aux équations (1) et (3), les valeurs de x, qui répondent aux maxima et aux minima de y, seront comprises dans la suite x_0, x_1, ...; nous faisons ici abstraction des maxima et des minima qui répondent aux valeurs de x pour lesquelles $\frac{dy}{dx}$ cesse d'être continue.

Il peut arriver que les deux équations

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

admettent des solutions communes qui satisfassent en même temps à l'équation (1). Pour les valeurs particulières de x auxquelles répond une valeur de y qui satisfait à la fois aux équations (1) et (4), la valeur de $\frac{dy}{dx}$ ne peut plus être tirée de l'équation (2); nous nous bornerons ici à cette remarque, qui sera développée plus loin à l'occasion des points singuliers des courbes.

Pour reconnaître si une solution des équations (1) et (3) répond effectivement à un maximum ou à un minimum, il faut recourir aux dérivées de y d'ordres supérieurs. La différentiation de l'équation (2) donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

et, puisque $\frac{dy}{dx}$ est nulle, on aura, si $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ restent finies,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}};$$

le signe de cette expression indiquera s'il y a maximum ou minimum. Si $\frac{d^2 y}{dx^2}$ se réduit à zéro, il faudra opérer conformément à la théorie du n° 139.

148. Exemple. — *Trouver le maximum de la fonction y définie par l'équation*

$$f(x, y) = y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

où a est une constante donnée.

On a ici

$$\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x} = -ay + x^2, \quad \frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 - ax.$$

L'élimination de y entre les équations

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

donne

$$x^6 - 2a^3x^3 = 0,$$

d'où

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = a\sqrt[3]{2},$$

et les valeurs correspondantes de y sont

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y = a\sqrt[3]{4}.$$

Le premier système $(x = 0, y = 0)$ annule $\frac{\partial f}{\partial y}$, et il ne répond pas à la question du maximum ou du minimum; le deuxième système $(x = a\sqrt[3]{2}, y = a\sqrt[3]{4})$ répond à un maximum; on a effectivement

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-2x}{y^2 - ax} = -\frac{2}{a}.$$

149. Considérons le cas général où l'on a $m + 1$ variables $x, y, z, u, \ldots$ liées entre elles par m équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y, z, \ldots) = 0, \\ f_1(x, y, z, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{m-1}(x, y, z, \ldots) = 0, \end{array} \right.$$

et supposons qu'on demande les valeurs maxima et minima de l'une des variables, de y par exemple. On peut prendre l'une quelconque des variables pour variable indépendante; choisissons x et écartons les valeurs de cette variable pour lesquelles la dérivée $\frac{dy}{dx}$ devient disconti-

nue; la condition du maximum et du minimum sera

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{ou } dy = 0.$$

La différentiation des équations (1) donne

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy + \dfrac{\partial f}{\partial z} dz + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f_1}{\partial y} dy + \dfrac{\partial f_1}{\partial z} dz + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial f_{m-1}}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f_{m-1}}{\partial y} dy + \dfrac{\partial f_{m-1}}{\partial z} dz + \ldots = 0; \end{cases}$$

si l'on désigne par Y le déterminant formé avec les m^2 quantités

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}, & \dfrac{\partial f}{\partial z}, & \ldots, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \dfrac{\partial f_{m-1}}{\partial y}, & \dfrac{\partial f_{m-1}}{\partial z}, & \ldots, \end{matrix}$$

et par X ce que devient Y quand on y remplace

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y}$$

par

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x},$$

le résultat de l'élimination des différentielles $dz, \ldots$ entre les équations (2) sera

$$(3) \qquad X\,dx + Y\,dy = 0;$$

on aura donc, pour le maximum et pour le minimum,

$$(4) \qquad \frac{X}{Y} = 0.$$

En joignant cette équation (4) aux m équations (1), on obtiendra un système de $m+1$ équations simultanées dont il faudra chercher les solutions communes.

Il peut arriver que les équations (1) soient satisfaites par certaines valeurs des variables, en même temps que les équations

$$X = 0, \quad Y = 0;$$

ce cas doit être dans chaque problème l'objet d'un examen spécial.

Maintenant, pour faire la distinction des maxima et des minima, il faudra former l'expression de $\frac{d^2y}{dx^2}$ ou de d^2y, et, à cet effet, on différentiera les équations (2). L'élimination des différentielles $d^2z, \ldots$ donnera une équation de laquelle on tirera la valeur de d^2y. On voit facilement de quelle manière on devra opérer dans les cas où il deviendrait nécessaire de considérer les différentielles d'ordre supérieur à 2.

150. L'analyse qui précède est générale et elle embrasse le cas où l'on demanderait de trouver les valeurs maxima et minima d'une fonction explicite

$$F(x, y, z, \ldots)$$

de m variables liées entre elles par $m-1$ équations

$$f(x, y, z, \ldots) = 0, f_1(x, y, z, \ldots) = 0, \ldots, f_{m-2}(x, y, z, \ldots) = 0;$$

car, en joignant à ces $m-1$ équations la suivante :

$$u - F(x, y, z, \ldots) = 0,$$

on aura un système de m équations entre $m+1$ variables

et il s'agira de trouver les maxima et les minima de l'une de ces variables, savoir de u, ce qui est la question résolue au numéro précédent.

Des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables indépendantes.

151. Soit

$$f(x, y, z, \ldots)$$

une fonction de plusieurs variables indépendantes $x, y, z, \ldots$. On dit que cette fonction a une valeur maxima pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$, lorsque la différence

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l, \ldots) - f(x_0, y_0, z_0, \ldots)$$

est négative pour toutes les valeurs des accroissements h, k, $l, \ldots$ comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, la quantité positive ε étant d'ailleurs aussi petite que l'on voudra. Si, au contraire, la précédente différence est constamment positive pour les mêmes valeurs de h, k, $l, \ldots$, la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ prend une valeur minima pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$.

Supposons que les valeurs particulières $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$ répondent à un maximum ou à un minimum de $f(x, y, z, \ldots)$ et donnons à y, $z, \ldots$ les valeurs y_0, $z_0, \ldots$; notre fonction deviendra

$$f(x, y_0, z_0, \ldots);$$

elle ne dépend plus que de x, et, comme elle devient maximum ou minimum pour $x = x_0$, la dérivée

$$\frac{\partial f(x, y_0, z_0, \ldots)}{\partial x}$$

sera nulle ou discontinue pour $x = x_0$. Ainsi, dans

notre hypothèse, la dérivée de la fonction proposée, relative à x, savoir

$$\frac{\partial f(x, y, z, \ldots)}{\partial x},$$

doit être nulle ou devenir discontinue pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, ... Il est évident que le même raisonnement s'applique aux autres dérivées partielles

$$\frac{\partial f(x, y, z, \ldots)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(x, y, z, \ldots)}{\partial z}, \quad \ldots,$$

et, par conséquent, les valeurs de $x, y, z, \ldots$ qui répondent à un maximum ou à un minimum de la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ sont comprises parmi celles qui annulent la différentielle totale df de cette fonction ou qui la rendent discontinue.

152. On arrive au même résultat par l'emploi de la formule de Taylor. Supposons que l'on attribue aux variables $x, y, z, \ldots$ des valeurs déterminées quelconques, puisqu'on leur donne ensuite les accroissements arbitraires $h, k, l, \ldots$, qui ne sont autre chose que les différentielles dx, dy, dz, ..., on aura, par la formule de Taylor, et en faisant abstraction des valeurs qui rendent les dérivées partielles de $f(x, y, z, \ldots)$ discontinues,

$$\Delta f = df + R_2, \tag{1}$$

R_2 étant le reste de la série arrêtée au deuxième terme. Or, si df n'est pas nulle, le rapport de R_2 à df est infiniment petit en même temps que $h, k, l, \ldots$ (134), pourvu que les rapports de ces accroissements à l'un d'entre eux demeurent indéterminés; donc on pourra donner à $h, k, l, \ldots$ des valeurs absolues assez petites pour que Δf ait le signe de df, et par conséquent Δf changera de signe quand on changera les signes de $h, k, l, \ldots$. Ainsi les

valeurs que nous supposons à $x, y, z, \ldots$ ne répondent à un maximum ou à un minimum de la fonction f que dans le cas où l'on a

$$df = 0,$$

ce qui exige que l'on ait séparément

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \ldots,$$

puisque $dx, dy, dz, \ldots$ sont arbitraires.

Lorsque ces conditions sont remplies, l'accroissement Δf de f a pour valeur

$$(2) \qquad \Delta f = \frac{d^2 f}{1.2} + R_3,$$

par la formule de Taylor arrêtée au troisième terme. Supposons que, pour toutes les valeurs de $h, k, l, \ldots$ comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, la différentielle $d^2 f$ ne soit jamais négative et qu'elle ne s'annule pas, sauf pour $h = k = l = \ldots = 0$; comme on peut supposer ε assez petit pour que le rapport de R_3 à $\frac{d^2 f}{1.2}$ soit aussi petit que l'on voudra en valeur absolue, l'accroissement Δf aura le signe de $d^2 f$, et, par suite, on aura

$$\Delta f > 0;$$

les valeurs considérées de $x, y, z, \ldots$ répondent donc à un minimum de la fonction f. Le même raisonnement montre que, si $d^2 f$ n'est jamais positive et qu'elle ne s'annule pas, quand $h, k, l, \ldots$ prennent toutes les valeurs entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, si ce n'est pour $h = k = l = \ldots = 0$, on a

$$\Delta f < 0,$$

et alors les valeurs attribuées à $x, y, z, \ldots$ répondent à

un maximum. On voit enfin qu'il n'y a ni maximum ni minimum, lorsque, pour les valeurs de $h, k, l, \ldots$ comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, la différentielle d^2f prend des valeurs positives et des valeurs négatives.

Mais il peut arriver que la différentielle d^2f soit identiquement nulle pour les valeurs attribuées aux variables $x, y, z, \ldots$, ou bien que cette différentielle soit nulle, seulement pour certaines valeurs de $h, k, l, \ldots$ comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, et qu'elle conserve le même signe pour tous les autres systèmes de valeurs de $h, k, l, \ldots$. Quand ce dernier cas a lieu, il faut, pour que le minimum ou le maximum ait lieu, que l'inégalité

$$\Delta f > 0 \quad \text{ou} \quad \Delta f < 0,$$

persiste pour les valeurs de $h, k, l, \ldots$ qui annulent d^2f. Or, pour de telles valeurs, la formule de Taylor donne

$$(3) \qquad \Delta f = \frac{d^3 f}{1.2.3} + R_4,$$

et l'on en conclut immédiatement que les valeurs de h, $k, l, \ldots$ qui annulent d^2f doivent annuler en même temps d^3f; alors on a, par la formule de Taylor,

$$(4) \qquad \Delta f = \frac{d^4 f}{1.2.3.4} + R_5,$$

d'où il résulte que le maximum ou le minimum a lieu si, pour les valeurs de $h, k, l, \ldots$ qui annulent d^2f et d^3f, d^4f a constamment le signe $-$ ou constamment le signe $+$.

Lorsque, pour les valeurs attribuées à $x, y, z, \ldots$, la différentielle d^2f est identiquement nulle, la formule (3) montre que d^3f doit être elle-même identiquement nulle; on voit ensuite, par la formule (4), qu'il y a maximum ou minimum suivant que d^4f est constamment négative ou constamment positive.

Si $d^4 f$ est identiquement nulle ou si elle s'annule sans changer de signe pour certaines valeurs de h, k, l, ..., il faudra recourir aux différentielles des ordres supérieurs. Mais il serait inutile de pousser plus loin cette discussion; ce que nous avons dit suffit pour les applications.

153. Dans les cas les plus ordinaires du minimum et du maximum, on a constamment

$$d^2 f > 0 \quad \text{ou} \quad d^2 f < 0,$$

pour les valeurs de h, k, l, ... comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$. Nous allons chercher les conditions pour que l'une ou l'autre de ces inégalités ait lieu effectivement; nous considérerons seulement la première, savoir

$$d^2 f > 0,$$

laquelle répond au minimum; le cas du maximum se ramène à celui du minimum en changeant f en $-f$.

On a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} d^2 f = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} hl + \ldots \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} kl + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} l^2 + \ldots; \end{aligned}\right.$$

posons

$$h = \frac{\varepsilon}{\mathrm{E}}\xi, \quad k = \frac{\varepsilon}{\mathrm{E}}\eta, \quad l = \frac{\varepsilon}{\mathrm{E}}\zeta, \quad \ldots,$$

E étant une quantité positive aussi grande que l'on voudra, on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{E}^2}{\varepsilon^2} d^2 f = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\xi\eta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\xi\zeta + \ldots \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\eta\zeta + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\zeta^2 + \ldots; \end{aligned}\right.$$

Or, quand h, k, l, ... varient entre les limites $-\varepsilon$ et

$+\varepsilon$, ξ, η, ζ, ... varient de $-E$ à $+E$; d'ailleurs E est une quantité aussi grande que l'on veut; donc l'inégalité $d^2f > 0$ exige que le second membre de la formule (2) reste positif pour toutes les valeurs de ξ, η, ζ, ..., comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

La question que nous avons à résoudre consiste donc à trouver les conditions pour qu'une fonction entière et homogène du deuxième degré de m variables ξ, η, ζ, ... reste constamment positive. Désignons par V le second membre de la formule (2); posons en outre

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = A,\\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\eta + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\zeta + \ldots = P,\\ &\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\eta\zeta + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\zeta^2 + \ldots = Q,\end{aligned}\right.$$

on aura

$$(4)\qquad V = A\xi^2 + 2P\xi + Q.$$

Comme la fonction V se réduit à $A\xi^2$, quand η, ζ, ... s'annulent, on voit qu'on doit avoir d'abord

$$A > 0;$$

alors, en posant

$$(5)\qquad V_1 = AQ - P^2,$$

il vient

$$(6)\qquad AV = (A\xi + P)^2 + V_1.$$

La première partie de cette valeur de AV s'annule pour $\xi = -\frac{P}{A}$, quelles que soient η, ζ, ...; donc il faut que la quantité V_1 soit constamment positive.

Ainsi les conditions demandées pour que V soit constamment positive sont : 1° que A soit > 0; 2° que V_1 soit constamment positive. Or V_1 est, comme V, une fonction entière et homogène du deuxième degré, mais elle ne contient que $m-1$ variables; on pourra donc raisonner sur V_1 comme nous venons de le faire sur V : on trouvera ainsi les conditions pour que V_1 soit constamment positive, savoir : 1° qu'une certaine quantité déterminée A_1 soit > 0; 2° qu'une certaine fonction homogène du second degré V_2 de $m-2$ variables soit constamment positive. Il est évident qu'en continuant de cette manière on obtiendra m conditions

$$A > 0, \quad A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad \ldots, \quad A_{m-1} > 0,$$

nécessaires et suffisantes pour que l'on ait constamment $V > 0$.

Considérons en particulier le cas où la fonction f ne dépend que de deux variables x, y. Alors on a

$$V = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\xi\eta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2,$$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad P = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\eta, \quad Q = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2,$$

puis

$$V_1 = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\eta^2;$$

les conditions pour que V soit constamment positive sont donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0;$$

il est évident que ces conditions entraînent la suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0.$$

Pour passer au cas du minimum, il suffit de changer le sens de la première des deux inégalités qui expriment les conditions du maximum.

Application à quelques exemples.

154. Exemple I. — *Trouver le maximum de la fonction*

$$f = x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots u^\lambda (a - x - y - z - \dots - u)^\mu,$$

où l'on désigne par a une constante positive donnée, par α, β, γ, ..., λ, μ *des exposants entiers positifs.*

On a ici

$$\frac{df}{f} = \alpha\frac{dx}{x} + \beta\frac{dy}{y} + \dots + \lambda\frac{du}{u} - \mu\frac{dx + dy + \dots + du}{a - x - y - \dots - u},$$

$$\frac{d^2f}{f} - \left(\frac{df}{f}\right)^2 = -\alpha\left(\frac{dx}{x}\right)^2 - \dots + \mu\frac{(dx + dy + \dots + du)^2}{(a - x - y - \dots - u)^2}.$$

L'équation $df = 0$ peut être satisfaite par des valeurs nulles des variables $x, y, z, \dots, u$, et il est facile de reconnaître dans quels cas ces valeurs répondent à un maximum ou à un minimum. Nous en ferons ici abstraction; alors la condition $df = 0$ donnera

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{\gamma}{z} = \dots = \frac{\lambda}{u} = \frac{\mu}{a - x - y - \dots - u};$$

d'où l'on tire

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \dots = \frac{u}{\lambda} = \frac{a}{\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu}$$

et

$$f = \left(\frac{a}{\alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu}\right)^{\alpha+\beta+\dots+\lambda+\mu} \alpha^\alpha \beta^\beta \dots \lambda^\lambda \mu^\mu;$$

enfin on a, par les formules écrites plus haut et à cause de $df = 0$,

$$d^2 f < 0:$$

donc la précédente valeur de f est un maximum.

155. Exemple II. — *Trouver les maxima et les minima de la distance de deux points appartenant respectivement à deux courbes données.*

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point M de la première courbe; x', y', z' celles d'un point M′ de la seconde, et V le carré de la distance MM′, on aura

$$(1) \qquad V = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Il y a ici deux variables indépendantes; on peut choisir x et x'; alors y et z seront des fonctions données de x, y' et z' des fonctions données de x'. On a

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} &= \quad (x - x') + (y - y')\frac{dy}{dx} + (z - z')\frac{dz}{dx}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x'} &= -(x - x') - (y - y')\frac{dy'}{dx'} + (z - z')\frac{dz'}{dx'}, \end{aligned} \right.$$

puis

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right) + (y - y')\frac{d^2 y}{dx^2} + (z - z')\frac{d^2 z}{dx^2}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} &= \left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} + \frac{dz'^2}{dx'^2}\right) - (y - y')\frac{d^2 y'}{dx^2} - (z - z')\frac{d^2 z'}{dx'^2}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial x'} &= -\left(1 + \frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dx'} + \frac{dz}{dx}\frac{dz'}{dx}\right). \end{aligned} \right.$$

Les conditions communes au maximum et au minimum

sont donc

$$(4)\quad \begin{cases} (x-x')+(y-y')\dfrac{dy}{dx}+(z-z')\dfrac{dz}{dx}=0, \\ (x-x')+(y-y')\dfrac{dy'}{dx'}+(z-z')\dfrac{dz'}{dx'}=0. \end{cases}$$

Les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dx'}$ sont données par les équations des deux courbes, et en joignant à ces équations les deux précédentes, on aura un système de six équations qui détermineront les coordonnées x, y, z, x', y', z'. Mais, pour que le maximum ou le minimum ait effectivement lieu, on doit avoir

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial x'}\right)^2>0.$$

S'il en est ainsi, il y aura minimum quand $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}$ seront négatives, maximum dans le cas contraire.

Les équations (4) expriment, comme on le verra plus loin, que la droite menée par les points (x, y, z), (x', y', z') est normale aux courbes données. Ce fait résulte d'ailleurs évidemment de ce qui a été dit au n° 145.

156. Supposons que les courbes données se réduisent à des lignes droites ayant pour équations

$$x=az+\alpha,\qquad y=bz+\beta$$

et

$$x'=a'z'+\alpha',\quad y'=b'z'+\beta'.$$

Comme on a ici

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{1}{a},\quad \frac{dy'}{dx'}=\frac{b'}{a'},\quad \frac{dz'}{dx'}=\frac{1}{a'},$$

et que les dérivées $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, $\frac{d^2z'}{dx'^2}$ sont nulles, on

vérifie immédiatement que les conditions du minimum sont remplies. Alors les équations (4) du n° 155 sont

$$a(x-x')+b(y-y')+(z-z')=0,$$
$$a'(x-x')+b'(y-y')+(z-z')=0,$$

et on peut les remplacer par deux des trois suivantes :

$$(a'-a)(x-x')+(b'-b)(y-y')=0,$$
$$(ba'-ab')(x-x')-(b'-b)(z-z')=0,$$
$$(ba'-ab')(y-y')+(a'-a)(z-z')=0.$$

Mais des équations des droites on déduit

$$(b'-b)(x-x')-(a'-a)(y-y')+(ba'-ab')(z-z')$$
$$=(a'-a)(\beta'-\beta)-(b'-b)(\alpha'-\alpha),$$

et si l'on ajoute les quatre équations précédentes, après les avoir élevées au carré, il viendra

$$[(a'-a)^2+(b'-b)^2+(ab'-ba')^2]V$$
$$=[(a'-a)(\beta'-\beta)-(b'-b)(\alpha'-\alpha)]^2;$$

on déduit de là l'expression connue de la plus courte distance des droites données, savoir :

$$\sqrt{V}=\frac{(a'-a)(\beta'-\beta)-(b'-b)(\alpha'-\alpha)}{\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2+(ab'-ba')^2}}.$$

157. Exemple III. — *Trouver les maxima et les minima de la distance d'un point donné à une surface donnée.*

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point donné M_0 relatives à trois axes rectangulaires, et x, y, z les coordonnées d'un point de la surface. Le carré de la distance des deux points est

$$(1)\qquad V=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2;$$

z est une fonction donnée des deux variables indépendantes x, y, et nous ferons

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy.$$

D'après cela on aura

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V}{\partial x} = (x - x_0) + p(z - z_0), \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V}{\partial y} = (y - y_0) + q(z - z_0), \end{cases}$$

puis

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = (1 + p^2) + r(z - z_0), \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = (1 + q^2) + t(z - z_0), \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = pq + s(z - z_0); \end{cases}$$

enfin, si l'on fait, pour abréger l'écriture,

$$(4)\qquad \begin{cases} A = rt - s^2, \\ B = (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t, \\ C = 1 + p^2 + q^2, \end{cases}$$

on aura, par les formules (3),

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] = A\,(z - z_0)^2 + B\,(z - z_0) + C.$$

La condition du maximum ou du minimum donne

$$(5)\qquad \begin{cases} x - x_0 + p(z - z_0) = 0, \\ y - y_0 + q(z - z_0) = 0; \end{cases}$$

ces équations, jointes à celle de la surface, détermineront les coordonnées x, y, z; on verra plus loin quelles sont

précisément les équations d'une normale à la surface, quand on y considère x_0, y_0, z_0 comme des coordonnées variables, x, y, z comme des quantités données.

Mais, pour qu'un point $M(x, y, z)$, déterminé comme on vient de le dire, réponde effectivement à un maximum ou à un minimum, il faut que l'on ait

$$(6) \qquad A(z - z_0)^2 + B(z - z_0) + C > 0.$$

Désignons par Z une indéterminée, remplaçons z_0 par Z dans le premier membre de cette inégalité, et égalons le résultat à zéro; on obtiendra l'équation

$$(7) \qquad A(z - Z)^2 + B(z - Z) + C = 0,$$

dont les racines sont toujours réelles, car on a

$$B^2 - 4AC = (1+p^2)(1+q^2)p^2q^2\left(\frac{2s}{pq} - \frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2}\right)^2 + (1+p^2+q^2)(1+p^2)(1+q^2)\left(\frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2}\right)^2.$$

Soient z' et z'' les racines Z de l'équation (7), le premier membre de cette équation sera identiquement égal à

$$A(z' - Z)(z'' - Z),$$

et, par suite, en remettant au lieu de A sa valeur, notre condition (6) deviendra

$$(8) \qquad (rt - s^2)(z' - z_0)(z'' - z_0) > 0.$$

Soient M', M'' les points de la normale M_0M pour lesquels la coordonnée z a les valeurs z', z''; la condition (8) exprime que, si l'on a

$$rt - s^2 > 0,$$

il faut et il suffit, pour le maximum ou le minimum, que le point donné M_0 ne soit pas situé entre le point M' et le point M''. Au contraire, si l'on a

$$rt - s^2 < 0,$$

il faut et il suffit, pour le maximum ou le minimum, que le point M_0 soit situé entre M' et M''.

Il reste à faire la distinction du maximum et du minimum. La condition (6) étant remplie, la quantité

$$q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2pq \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + p^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

ne peut s'annuler, et par conséquent elle a le signe des dérivées

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2};$$

donc la somme de ces trois quantités aura encore le même signe, et l'expression

$$(1 + q^2) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2pq \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + (1 + p^2) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

sera négative dans le cas du maximum, positive dans le cas du minimum. On reconnaît ainsi, au moyen des formules (3) et (4), que l'on a

$$(9) \qquad B(z - z_0) + 2C < 0$$

dans le cas du maximum, et

$$(10) \qquad B(z - z_0) + 2C > 0$$

dans le cas du minimum. Mais l'équation (7), qui a pour racines z' et z'', nous donne

$$\frac{B}{C} = -\frac{1}{z - z'} - \frac{1}{z - z''};$$

donc la quantité

$$\frac{z_0 - z'}{z - z'} + \frac{z_0 - z''}{z - z''}$$

est négative dans le cas du maximum, positive dans le cas du minimum.

Supposons d'abord $rt - s^2 > 0$; alors les deux valeurs $z - z'$, $z - z''$ de $z - Z$ tirées de l'équation (7)

sont de même signe; donc les deux points M′ et M″ de la ligne MM_0 ou uv sont situés d'un même côté par rapport au point M. Les différences $z_0 - z'$ et $z_0 - z''$ sont aussi

u M M₀ M′ M″ v

de même signe, comme on l'a vu plus haut, et les points M′, M″ sont d'un même côté de uv par rapport au point M_0. On voit donc que la distance M_0M sera un minimum si les points M′, M″ ne sont pas situés entre M et M_0; elle sera un maximum dans le cas contraire.

Supposons en second lieu $rt - s^2 < 0$; d'après l'équation (7), les différences $z - z'$, $z - z''$ sont de signes contraires, et le point M est situé sur la ligne uv, entre M′ et M″; mais la condition (8) exige que $z_0 - z'$ et

u M′ M₀ M M″ v

$z_0 - z''$ soient également de signes contraires, c'est-à-dire que M_0 soit situé comme M entre M′ et M″. Dans ce cas il est évident que la distance M_0M est toujours un minimum.

Examinons encore le cas de $rt - s^2 = 0$. La condition (6) se réduit à

$$B(z - z_0) + C > 0,$$

et, quand elle est satisfaite, l'inégalité (10) a lieu à plus forte raison; il en résulte que le minimum a lieu. Il n'existe plus dans le cas actuel qu'un seul point M′ de la ligne M_0M dont la coordonnée z' satisfasse à l'équation

$$B(z - z') + C = 0.$$

En introduisant cette quantité z', l'inégalité précédente devient

$$\frac{z_0 - z'}{z - z'} > 0;$$

donc, pour que le minimum ait effectivement lieu, il faut et il suffit que le point donné M_0 soit situé sur celle des deux parties $M'u$, $M'v$ de la normale où se trouve le point M.

u M M₀ M v

Enfin, si l'on a pour les coordonnées de M

$$A = 0, \quad B = 0,$$

la condition (6) se réduit à

$$C > 0.$$

et elle est toujours satisfaite. Mais, dans notre hypothèse, on a

$$r^2 + s^2 + (qr - ps)^2 = 0,$$

et, par conséquent,

$$r = 0, \quad s = 0, \quad t = 0;$$

les formules (3) montrent que le minimum a lieu.

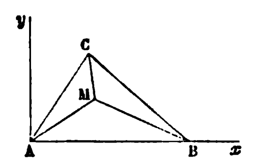
Les points M' et M'' jouent un rôle important dans la théorie des surfaces, ainsi qu'on le verra plus loin.

Cas où les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables cessent d'être déterminées quand on donne aux variables les valeurs qui répondent au maximum ou au minimum.

158. Nous avons dit que les valeurs des variables qui répondent au maximum ou au minimum d'une fonction doivent annuler les dérivées partielles de cette fonction, à moins que celles-ci ne cessent d'être continues. Nous devons ajouter, d'après une remarque importante due à M. Bertrand, qu'il peut arriver que les dérivées partielles

d'une fonction cessent d'être déterminées pour certaines valeurs des variables, et que ces valeurs répondent en même temps à un maximum ou à un minimum de la fonction. Nous présenterons ici l'exemple même que M. Bertrand a choisi pour justifier son assertion.

Problème. — *Trouver dans le plan d'un triangle donné le point dont les distances aux sommets du triangle ont une somme minima.*



Prenons le côté AB du triangle donné ABC pour axe des x, et la perpendiculaire Ay à AB pour axe des y. Désignons par c la longueur du côté AB, par x_0, y_0 les coordonnées du point C et par x, y les coordonnées du point cherché M. La fonction dont on demande ici le minimum est

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2};$$

il est évident *a priori* que ce minimum existe dans tous les cas, et que la question ne comporte pas de maximum.

En égalant à zéro les deux dérivées partielles de la somme précédente, on a les deux équations

$$(1)\quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}+\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0,$$

$$(2)\quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}+\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0,$$

qui représentent deux courbes dont l'intersection donnera le point demandé M. Mais on peut à ces deux courbes en

substituer d'autres plus simples. A cet effet, désignons par ω, ψ, ϖ les angles formés par les directions AM, BM, CM avec la direction Ax de l'axe des x; chacun de ces angles doit être regardé conme engendré par une droite d'abord parallèle à Ax, menée par le point A, ou B, ou C, et qui se mouvrait toujours dans le même sens, en s'élevant vers la partie positive de l'axe des y. D'après cela on a

$$\cos\omega = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\omega = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\cos\psi = \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}, \qquad \sin\psi = \frac{y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}},$$

$$\cos\varpi = \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}, \quad \sin\varpi = \frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}},$$

et les équations (1) et (2) deviennent

$$\cos\omega + \cos\psi + \cos\varpi = 0,$$
$$\sin\omega + \sin\psi + \sin\varpi = 0,$$

d'où

$$\cos\omega + \cos\psi = -\cos\varpi, \quad \sin\omega + \sin\psi = -\sin\varpi.$$

En ajoutant ces deux équations après les avoir élevées au carré, on obtient

$$(\cos\omega + \cos\psi)^2 + (\sin\omega + \sin\psi)^2 = 1,$$

ou

$$1 + 2\cos(\psi - \omega) = 0, \quad \text{et} \quad \cos(\psi - \omega) = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi l'angle $\psi - \omega$, qui n'est autre chose que AMB, a pour cosinus $-\frac{1}{2}$, et par conséquent cet angle AMB est de 120 degrés. On conclut de là que le point M est à l'intersection de trois segments capables de 120 degrés décrits sur les trois côtés du triangle respectivement;

les cercles auxquels appartiennent deux de ces segments peuvent donc être substitués aux courbes représentées par les équations (1) et (2).

Or, pour que les arcs, bases des segments dont il vient d'être question, se coupent réellement, il faut et il suffit que les angles du triangle soient tous les trois inférieurs à 120 degrés. Donc, s'il y a dans le triangle un angle supérieur à 120 degrés, les équations (1) et (2), auxquelles conduit la théorie, ne feront point connaître le minimum, quoique celui-ci ait certainement lieu. Mais les premiers membres de ces équations cessent d'avoir des valeurs déterminées quand on remplace x et y par les coordonnées de l'un des sommets du triangle : donc le point demandé ne peut être que l'un de ces sommets. C'est ce qu'il est facile de démontrer directement.

159. Désignons toujours par ω l'angle MAB; nommons en outre ρ la distance AM, b le côté AC du triangle, et A l'angle CAB. La somme S des distances AM, BM, CM sera

$$S = \rho + \sqrt{c^2 - 2c\rho\cos\omega + \rho^2} + \sqrt{b^2 - 2b\rho\cos(A-\omega) + \rho^2};$$

or on a, par la formule du binôme, lorsque $\frac{\rho}{c}$ est suffisamment petit,

$$\begin{aligned}\sqrt{c^2 - 2c\rho\cos\omega + \rho^2}\\ &= c\left[1 - 2\left(\frac{\rho}{c}\cos\omega - \frac{\rho^2}{2c^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= c\left[1 - \left(\frac{\rho}{c}\cos\omega - \frac{\rho^2}{2c^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{c}\cos\omega - \frac{\rho^2}{2c^2}\right)^2 - \ldots\right],\end{aligned}$$

ou, en ordonnant par rapport à ρ, et en désignant par ε une quantité qui s'évanouit avec ρ,

$$\sqrt{c^2 - 2c\rho\cos\omega + \rho^2} = c - \rho\cos\omega + \rho^2\frac{\sin^2\omega}{2c} + \varepsilon\rho^2.$$

Si l'on remplace dans cette formule c et ω par b et $A-\omega$, ε par η, on aura

$$\sqrt{b^2 - 2b\rho\cos(A-\omega) + \rho^2}$$
$$= b - \rho\cos(A-\omega) + \rho^2\frac{\sin^2(A-\omega)}{2b} + \eta\rho^2.$$

Alors l'expression de S deviendra

$$S = (b+c) + \rho[1 - \cos\omega - \cos(A-\omega)]$$
$$+ \frac{\rho^2}{2}\left[\frac{\sin^2\omega}{c} + \frac{\sin^2(A-\omega)}{b}\right] + (\varepsilon+\eta)\rho^2,$$

ou

$$S = (b+c) + \rho\left[1 - 2\cos\frac{1}{2}A\cos\left(\frac{1}{2}A - \omega\right)\right]$$
$$+ \frac{\rho^2}{2}\left[\frac{\sin^2\omega}{c} + \frac{\sin^2(A-\omega)}{b}\right] + (\varepsilon+\eta)\rho^2.$$

Cette expression se réduit à

$$S_0 = b + c,$$

pour $\rho = 0$, et si l'on suppose que ρ soit un infiniment petit, la différence

$$S - S_0$$

aura le signe de

$$1 - 2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(A-\omega).$$

Dans le cas de $A < 120$ degrés, $2\cos\frac{1}{2}A$ est supérieur à 1, et par conséquent $S - S_0$ peut changer de signe; il s'ensuit que S_0 ou $b + c$ n'est pas une valeur minima ou maxima de S. Si l'on a $A > 120$ degrés ou $A = 120$ degrés, le coefficient de ρ dans l'expression de S ne pourra devenir négatif; ce coefficient s'annulera pour $\omega = \frac{1}{2}A$,

dans le cas de $A = 120^\circ$; mais, comme le coefficient de ρ^2 est positif, on aura toujours

$$S > S_0,$$

et par conséquent S_0 sera une valeur minima.

Donc, lorsque le triangle ABC a un angle supérieur à 120 degrés ou égal à 120 degrés, le sommet de cet angle est le point demandé.

Cas des fonctions implicites de plusieurs variables indépendantes.

160. Considérons le cas général où l'on a n équations

$$(1)\quad \begin{cases} f(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0, \\ f_1(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{n-1}(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0, \end{cases}$$

entre $m + n$ variables $x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots$. Parmi ces $m + n$ variables, il y en a m, $x, y, z, \ldots$, par exemple, qui sont indépendantes, et les n autres variables sont des fonctions de celles-ci; nous nous proposons de déterminer les maxima et les minima de l'une des fonctions $u, v, w, \ldots$.

La différentiation des équations (1) donne

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial u}du + \dfrac{\partial f}{\partial v}dv + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}dy + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial u}du + \dfrac{\partial f_1}{\partial v}dv + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x}dx + \ldots + \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial u}du + \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial v}dv + \ldots = 0. \end{cases}$$

Si u est celle des variables dont il faut trouver les maxima et les minima, on éliminera, entre les n équations (2), les $n-1$ différentielles dv, dw, ..., et l'on obtiendra un résultat de la forme

$$(3) \qquad X dx + Y dy + Z dz + \ldots + U du = 0.$$

La condition du maximum ou du minimum donne $du = 0$, et les différentielles qui restent dans l'équation (3) étant arbitraires, on aura les m équations

$$(4) \qquad \frac{X}{U} = 0, \quad \frac{Y}{U} = 0, \quad \frac{Z}{U} = 0, \quad \ldots.$$

Les systèmes (1) et (4) comprennent $m+n$ équations qui suffiront pour déterminer les $m+n$ variables. Pour reconnaître si l'une des valeurs de u ainsi obtenues est effectivement un maximum ou un minimum, il faudra calculer la valeur de $d^2 u$ et examiner si cette différentielle conserve le même signe.

Remarque sur le cas d'une fonction explicite de plusieurs variables liées par des équations données.

161. Le cas précédent comprend celui où l'on demande de trouver les maxima et les minima d'une fonction explicite

$$F(x, y, z, \ldots)$$

de $m+n-1$ variables liées entre elles par $n-1$ équations

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, \ldots) = 0, \\ f_1(x, y, z, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{n-1}(x, y, z, \ldots) = 0, \end{cases}$$

car, en désignant par u la fonction $F(x, y, z, \ldots)$ et en joignant aux équations (1) la suivante :

$$u = F(x, y, z, \ldots),$$

on rentre dans le cas de n équations entre $m+n$ variables. D'après l'analyse du n° 160, il faudra différentier l'équation précédente ainsi que les équations (1), et, puisque du est nulle dans le cas du maximum ou du minimum, on aura

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \ldots = 0,$$

puis

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy + \dfrac{\partial f}{\partial z} dz + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f_1}{\partial y} dy + \dfrac{\partial f_1}{\partial z} dz + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial f_{n-2}}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f_{n-2}}{\partial y} dy + \dfrac{\partial f_{n-2}}{\partial z} dz + \ldots = 0. \end{array} \right.$$

Cela posé, il nous faut éliminer, entre les n équations (2) et (3), $n-1$ des différentielles dx, dy, dz, ... et égaler ensuite à zéro les coefficients des différentielles qui restent dans l'équation finale. Pour faire l'élimination nous ajouterons l'équation (2) avec les équations (3), après avoir multiplié celles-ci respectivement par des facteurs indéterminés

$$\lambda, \ \lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_{n-2};$$

ces facteurs devront être choisis de manière à faire disparaître $n-1$ différentielles ; mais, comme il faudra ensuite égaler à zéro les coefficients des différentielles restantes, on voit que les coefficients de toutes les différentielles

devront être égalés à zéro. Ainsi l'on formera les équations suivantes :

$$
(4)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial F}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \ldots + \lambda_{n-2} \dfrac{\partial f_{n-2}}{\partial x} = 0, \\
\dfrac{\partial F}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \ldots + \lambda_{n-2} \dfrac{\partial f_{n-2}}{\partial y} = 0, \\
\dfrac{\partial F}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} + \ldots + \lambda_{n-2} \dfrac{\partial f_{n-2}}{\partial z} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

Il reste à éliminer les $n-1$ indéterminées $\lambda, \lambda_1, \ldots$ entre les $m+n-1$ équations (4), et l'on obtiendra de la sorte m équations qui, jointes aux équations (1), serviront à déterminer les $m+n-1$ inconnues $x, y, z, \ldots$.

162. L'emploi des facteurs λ n'a fait jusqu'ici que substituer une élimination à une autre, ce qui n'a pas un grand intérêt: mais la considération de ces facteurs va nous permettre d'établir une proposition importante.

Si les variables $x, y, z, \ldots$ étaient toutes indépendantes, la condition du maximum ou du minimum de la fonction F donnerait les équations

$$
\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \ldots;
$$

mais il n'en est plus ainsi dans notre cas, où il s'agit d'un maximum ou d'un minimum relatif, les variables $x, y, z, \ldots$ étant liées par les équations (1). Or les équations (4) montrent que le maximum ou le minimum relatif demandé s'obtiendra par la règle du maximum ou du minimum absolu, appliquée à la fonction

$$
F + \lambda f + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_{n-2} f_{n-2},
$$

$\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$ étant des facteurs indéterminés.

Ajoutons en terminant que, dans bien des cas, il sera plus avantageux de traiter $F(x, y, z, \ldots)$ comme une fonction explicite de m variables seulement, ce qui est permis en supposant que $n-1$ des $m+n-1$ variables soient remplacées par leurs valeurs fonctions des m autres. C'est ainsi que nous avons procédé dans quelques-uns des problèmes précédemment traités.

CHAPITRE VII.

THÉORIE DES COURBES PLANES.

De la tangente et de la normale aux courbes planes. — Limite des tangentes.

163. Soient x et y les coordonnées rectilignes d'une courbe plane donnée. Quelle que soit la variable qu'on regarde comme indépendante, le coefficient d'inclinaison de la *tangente* au point (x, y) de la courbe sera, comme on l'a vu, la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ou le quotient $\frac{dy}{dx}$ des différentielles dy et dx. En outre, si X et Y désignent les coordonnées de la tangente, celle-ci aura pour équation

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

La *normale* à la courbe, ou la perpendiculaire élevée sur la tangente, par le point de contact, aura, dans le cas des axes rectangulaires, l'équation

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x);$$

dans le cas général où les axes font entre eux un angle quelconque θ, l'équation de cette normale sera

$$Y - y = -\frac{dx + dy\cos\theta}{dy + dx\cos\theta}(X - x).$$

Lorsque les coordonnées x et y de la courbe sont don-

nées en fonction d'une variable t, de manière que l'on ait

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

on conclut immédiatement

$$dx=\varphi'(t)dt,\quad dy=\psi'(t)dt,$$

puis

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Lorsque l'équation

$$f(x,y)=0$$

de la courbe est donnée, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est déterminée, comme on l'a vu, par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

et, si l'on y remplace $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{Y-y}{X-x}$, on aura l'équation de la tangente, savoir :

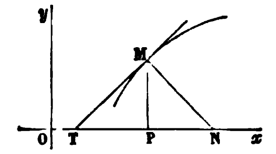
$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Lorsque la courbe donnée passe par l'origine des coordonnées, le coefficient angulaire de la tangente est évidemment la limite $\frac{y}{x}$ pour $x=0$; au reste on a (n° 124)

$$\lim\frac{y}{x}=\lim\frac{\frac{dy}{dx}}{1},\quad \text{pour}\quad x=0.$$

164. Nous avons déjà eu l'occasion (n° 28) de dire ce que l'on entend par *longueur de la tangente* ou de la *normale,* et nous avons mentionné aussi les dénominations de *sous-tangente* et de *sous-normale*. Supposons les axes rectangulaires; soient M le point de contact

et MP son ordonnée, T et N les points où l'axe des x est rencontré par la tangente MT et par la normale MN. Nous



désignerons par T et N les longueurs MT et MN de la tangente et de la normale; par T' et N' la sous-tangente TP et la sous-normale PN. Alors les triangles rectangles PMT, PMN, dans lesquels les angles MTP, PMN ont $\frac{dy}{dx}$ pour tangente, donneront

$$T' = y\frac{dx}{dy}, \quad N' = y\frac{dy}{dx};$$

les mêmes triangles donneront aussi

$$T = \sqrt{y^2 + T'^2}, \quad N = \sqrt{y^2 + N'^2},$$

et, par conséquent,

$$T = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}, \quad N = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}.$$

Il faut remarquer que les expressions de T' et de N' sont positives ou négatives selon que les directions TP, PN coïncident avec la direction Ox ou avec la direction opposée.

165. Asymptotes. — Limite des tangentes. — Une ligne droite est dite, comme on sait, *asymptote* d'une branche de courbe, si la distance d'un point M de la courbe à la droite tend vers la limite zéro, quand ce point M s'éloigne indéfiniment en restant toujours sur la courbe. Il est facile de voir que l'asymptote est en général

la limite vers laquelle tend la tangente au point M, quand ce point M s'éloigne indéfiniment.

En effet, considérons une branche de courbe qui s'étend à l'infini et qui a pour asymptote une droite non parallèle à l'axe des y, représentée par l'équation

$$(1) \qquad Y = gX + h.$$

La distance du point (x, y) de la courbe à cette asymptote sera

$$\frac{(y - gx - h)\sin\theta}{\sqrt{1 + 2g\cos\theta + g^2}},$$

θ étant l'axe des axes; cette expression doit tendre vers zéro avec $\frac{1}{x}$; on aura donc, en désignant par ε une quantité qui s'évanouit avec $\frac{1}{x}$,

$$y - gx - h = \varepsilon \quad \text{ou} \quad y = gx + h + \varepsilon.$$

On tire de là

$$\frac{y}{x} = g + \frac{h + \varepsilon}{x},$$

et, pour $x = \infty$,

$$(2) \qquad g = \lim \frac{y}{x}.$$

Ensuite on a

$$h = (y - gx) - \varepsilon,$$

et, par conséquent,

$$(3) \qquad h = \lim(y - gx).$$

Les équations (2) et (3) permettent de déterminer les constantes g, h de l'équation de l'asymptote.

Maintenant, reprenons l'équation de la tangente à la courbe, savoir :

$$(4) \qquad Y = \frac{dy}{dx} X + \left(y - x\frac{dy}{dx}\right).$$

$\frac{y}{x}$ est une expression fractionnaire dont les deux termes deviennent infinis simultanément; on a donc (n° **124**)

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{\frac{dy}{dx}}{1} \quad \text{pour} \quad x = \infty,$$

et par conséquent

$$\lim \frac{dy}{dx} = g.$$

Ensuite on a

$$\lim (y - gx) = \lim \frac{g - \frac{y}{x}}{-\frac{1}{x}};$$

les deux termes de la fraction $\frac{g - \frac{y}{x}}{-\frac{1}{x}}$ s'annulent pour $x = \infty$; on aura donc, en appliquant la règle du n° **124**,

$$\lim (y - gx) = \lim \frac{\left(\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)$$

donc

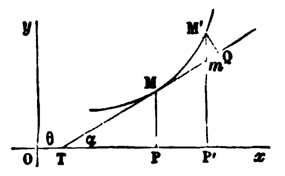
$$\lim \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = h.$$

Ainsi la tangente représentée par l'équation (4) a pour limite l'asymptote (1) quand le point (x, y) s'éloigne à l'infini, en demeurant toujours sur la branche de courbe que l'on considère. Cela suppose toutefois (n° **126**) que $\frac{dy}{dx}$ et $y - x\frac{dy}{dx}$ conservent des valeurs déterminées, quel que soit x; si le contraire avait lieu, l'asymptote ne serait plus la limite des tangentes. La courbe représentée

par l'équation $y = \frac{\sin x}{x}$ offre un exemple de ce cas; l'axe des x est ici une asymptote de la courbe, $\frac{dy}{dx}$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini, mais $y - x\frac{dy}{dx}$ est indéterminée pour $x = \infty$.

Ordre du contact d'une courbe avec sa tangente. — Points d'inflexion. — Concavité et convexité.

166. Soit TQ la tangente au point M de la courbe MM'; prenons sur la courbe le point M' infiniment voisin du



point M et abaissons la perpendiculaire M'Q sur la tangente. Le rapport $\frac{M'Q}{MQ}$ est égal à la tangente de l'angle M'MQ, lequel est infiniment petit; si donc on prend MQ pour infiniment petit principal, M'Q sera un infiniment petit d'un certain ordre $\mu + 1$ supérieur à l'unité. Je dirai que le nombre μ exprime l'*ordre du contact* de la courbe proposée avec la tangente au point M.

Rapportons la courbe à deux axes de coordonnées rectilignes Ox, Oy faisant entre eux un angle quelconque θ; menons les ordonnées MP, M'P', et soient T, m les points de rencontre de la tangente TQ avec l'axe des x et avec l'ordonnée M'P'. Si l'on désigne par α l'angle MTx, on aura, par le triangle rectangle M'mQ,

$$M'm = \frac{M'Q}{\sin(\theta - \alpha)}, \quad Mm = MQ - M'Q \cot(\theta - \alpha),$$

et, par le triangle mTP',

$$PP' = Mm \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta},$$

ou

$$PP' = MQ \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta} - M'Q \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\sin\theta}.$$

On voit que, si l'axe des y n'est pas parallèle à la tangente TQ, les rapports des infiniment petits

$$M'm, \quad PP'$$

aux infiniment petits respectifs

$$M'Q, \quad MQ$$

tendront vers des limites finies; donc, si l'on prend PP' pour infiniment petit principal, $M'm$ sera un infiniment petit de l'ordre $\mu + 1$.

Désignons par x, y les coordonnées du point M, par $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ celles du point M', et par Y l'ordonnée du point m de la tangente; l'ordre du contact en M sera inférieur d'une unité, d'après ce qui précède, à l'ordre infinitésimal de la différence

(1) $$(y + \Delta y) - Y \quad \text{ou} \quad \Delta y - (Y - y),$$

Δx étant l'infiniment petit principal. Or on a, par l'équation de la tangente,

$$Y - y = \frac{dy}{dx} \Delta x;$$

donc l'expression (1) se réduit à

(2) $$\Delta y - \frac{dy}{dx} \Delta x.$$

Cela posé, la formule de Taylor, arrêtée au troisième terme, donne

(3) $$\Delta y - \frac{dy}{dx} \Delta x = \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{1.2} + R_3,$$

en supposant remplies les conditions de continuité exigées, et l'on voit que, si $\frac{d^2y}{dx^2}$ n'est pas nulle, la différence (2) est un infiniment petit du deuxième ordre, qui ne change pas de signe quand Δx change de signe. Donc le contact d'une courbe avec sa tangente est, en général, du premier ordre, et la courbe est alors tout entière située d'un même côté de la tangente, dans le voisinage du point de contact.

Mais, si l'on a, pour le point M,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

la formule de Taylor, arrêtée au quatrième terme, donnera

$$(4) \qquad \Delta y - \frac{dy}{dx}\Delta x = \frac{d^3y}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + R_4,$$

et si $\frac{d^3y}{dx^3}$ n'est pas nulle, la différence (1) ou (2) sera un infiniment petit du troisième ordre dont le signe changera avec le signe de Δx. Dans ce cas, le contact au point M est du deuxième ordre; en outre, puisque la différence $(y + \Delta y) - Y$ change de signe en même temps que Δx, la courbe traverse la tangente en M. On dit qu'il y a *inflexion* en M, ou que M est un *point d'inflexion*.

Cela exige que $\frac{d^3y}{dx^3}$ ne soit pas nulle. Supposons généralement que l'on ait au point M

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 0,$$

mais que la dérivée suivante $\frac{d^ny}{dx^n}$ ne soit pas nulle. On aura, par la formule de Taylor,

$$(5) \qquad \Delta y - \frac{dy}{dx}\Delta x = \frac{d^ny}{dx^n}\frac{\Delta x^n}{1.2\ldots n} + R_{n+1}.$$

L'expression (1) ou (2) est un infiniment petit de l'ordre n, et la courbe a, au point M, un contact d'ordre $n-1$ avec sa tangente. Si n est pair, la différence (1), $(y+\Delta y)-Y$ ne change pas de signe quand Δx change de signe, et, dans le voisinage du point de contact, la courbe est entièrement située d'un même côté de la tangente. Au contraire, si n est impair, la différence $(y+\Delta y)-Y$ change de signe en même temps que Δx, la courbe traverse sa tangente et le point M est un point d'inflexion.

On voit en résumé que les points d'inflexion d'une courbe sont les points où la courbe a un contact d'ordre pair avec sa tangente. Il est à peine nécessaire d'ajouter que l'analyse qui précède laisse de côté les cas où les dérivées de l'ordonnée de la courbe ne sont pas toutes continues dans le voisinage des points que l'on considère.

Nous présenterons encore ici une remarque importante. Menons par le point M une droite quelconque, et soit Y_1 l'ordonnée de cette droite, correspondant à l'abscisse $x+\Delta x$; on aura $Y_1 = a\Delta x$, a étant le coefficient d'inclinaison de la droite; par conséquent

$$Y - Y_1 = \left(\frac{dy}{dx} - a\right)\Delta x,$$

$$(y+\Delta y) - Y_1 = \left(\frac{dy}{dx} - a\right)\Delta x + \ldots,$$

et, Δx étant infiniment petit, on voit que les différences

$$Y - Y_1, \quad (y+\Delta y) - Y_1$$

sont de même signe. On conclut de là qu'il est impossible de mener, par un point d'une courbe, une droite qui soit comprise entre cette courbe et la tangente, dans le voisinage du point de contact.

167. Remarque sur les points d'inflexion. — Soit

TT′ la tangente en un point d'inflexion M; prenons sur la courbe, de part et d'autre du point M, deux points M′, M″; la tangente TT′ est la limite vers laquelle tendent les sécantes MM′, MM″, lorsque les points M′ et M″ se rapprochent indéfiniment de M. Or, si l'angle M″MT′ est plus grand que M′MT, il lui deviendra égal quand le



point M″ se sera suffisamment rapproché de M; on peut donc supposer ces angles variables M″MT′ et M′MT égaux entre eux. Il résulte de là que si, par un point d'inflexion d'une courbe, on mène une sécante infiniment voisine de la tangente, cette sécante rencontrera la courbe en divers autres points, parmi lesquels il y en aura deux au moins qui, à la limite, se confondront avec le point d'inflexion.

168. Concavité et convexité. — On dit qu'une courbe est *concave* en un de ses points M vers une droite donnée, ou qu'elle tourne sa *concavité* vers la droite, lorsque, dans le voisinage de M, elle est située tout entière dans l'angle aigu que forme la tangente en M avec la droite donnée. Au contraire, elle est *convexe* en M, ou elle tourne sa *convexité* vers la droite donnée, lorsque, dans le voisinage de ce point, elle est située tout entière dans l'angle obtus formé par la tangente en M avec la droite.

Les résultats obtenus au nº 166 donnent le moyen de reconnaître si une courbe présente, en un point donné, sa concavité ou sa convexité vers l'axe de x. Supposons d'abord que les axes soient rectangulaires; on voit sur la figure du nº 166 qu'il y aura concavité ou convexité en M suivant que l'ordonnée $M'P' = y + \Delta y$ sera inférieure

ou supérieure à l'ordonnée $mP' = Y$ de la tangente. Or l'excès de la première ordonnée sur la seconde est égale à $\Delta y - \frac{dy}{dx}\Delta x$, expression qui, d'après la formule (3) du n° 166, a le signe de $\frac{d^2y}{dx^2}$: donc la courbe sera concave ou convexe en M, vers l'axe des x, selon que $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera négative ou positive. Toutefois, cela suppose que y soit positive, et il est évident que le contraire aura lieu, dans le cas de y négative.

On voit, d'après cela, qu'une courbe reste convexe vers l'axe des x, tant que y et $\frac{d^2y}{dx^2}$ ont le même signe, qu'elle reste concave au contraire tant que y et $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont de signes contraires. Lorsque $\frac{d^2y}{dx^2}$ s'annule, la concavité ou la convexité persiste, si le contact de la courbe avec sa tangente est d'ordre impair; mais si ce contact est d'ordre pair, il y a inflexion; la concavité se change en convexité, ou inversement.

169. La conclusion précédente ne subsiste pas toujours quand les axes font un angle aigu ou obtus θ; soit alors α l'angle que fait la tangente avec l'axe des x, en sorte que l'on ait

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

Lorsqu'on a $\alpha < \theta$, dans le cas de $\alpha < 90°$, ou $\alpha > \theta$ dans le cas de $\alpha > 90°$, la condition de la concavité ou de la convexité est la même que si les axes étaient rectangulaires. Mais, si l'hypothèse contraire a lieu, la condition de la concavité ou de la convexité est celle qui a lieu pour la convexité ou la concavité dans le cas des axes rectangulaires. On vérifie facilement sur une figure l'exactitude

de notre assertion, mais on y parvient aussi par un calcul bien simple. Désignons par x_1, y_1 les coordonnées relatives à l'axe actuel des x et à un axe des y_1 perpendiculaire au premier; on aura

$$y_1 = y\sin\theta, \quad x_1 = x + y\cos\theta.$$

On tire de là

$$\frac{1}{y_1}\frac{d\frac{dy_1}{dx_1}}{dx_1} = \frac{1}{y}\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}\left(1 + \frac{dy}{dx}\cos\theta\right)^{-3},$$

et l'on a

$$1 + \frac{dy}{dx}\cos\theta = \frac{\sin\theta\cos\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

Le signe de $\frac{1}{y_1}\frac{d\frac{dy_1}{dx_1}}{dx_1}$ fait connaître s'il y a concavité ou convexité, et cette quantité a le même signe que $\frac{1}{y}\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$ quand $\cos\alpha$ et $\sin(\theta-\alpha)$ sont de même signe; elle est de signe contraire à $\frac{1}{y}\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$ quand $\cos\alpha$ et $\sin(\theta-\alpha)$ sont de signes contraires.

170. Exemples. — 1° Considérons la courbe dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est

$$y = \sin x.$$

On a

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x, \quad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = -1.$$

Il en résulte que la courbe est constamment concave vers l'axe des x, et que les points où elle rencontre cet axe sont des points d'inflexion.

2° Soit la courbe dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est

$$y = \tang x.$$

On a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\tang x}{\cos^2 x}, \quad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{\cos^2 x};$$

la courbe tourne donc constamment sa convexité vers l'axe des x, et les points où elle le rencontre sont des points d'inflexion.

3° Soit la courbe ayant pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$y = \frac{x^3 - x}{3x^2 + 1},$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^4 + 6x^2 - 1}{(3x^2 + 1)^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{24(x - x^3)}{(3x^2 + 1)^3},$$

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-24}{(3x^2 + 1)^2}.$$

On voit que la courbe tourne constamment sa concavité vers l'axe des x; elle a trois points d'inflexion qui sont situés sur cet axe et qui répondent aux abscisses $x = -1$, $x = 0$, $x = +1$. Les valeurs correspondantes de $\frac{dy}{dx}$ sont $\frac{1}{2}$, -1, $\frac{1}{2}$.

Emploi des coordonnées homogènes.

171. Otto Hesse a eu le premier l'ingénieuse idée de représenter les deux coordonnées rectilignes d'un point par les rapports de deux variables x, y à une indéterminée z. Il en résulte que toutes les équations deviennent homogènes, ce qui offre souvent de précieux avantages. Les coordonnées étant ainsi désignées par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$,

l'équation d'une courbe quelconque aura la forme

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

f désignant une fonction homogène des trois variables x, y, z. Quand on passe d'un point de la courbe à un autre point, on peut à volonté supposer z constante ou la regarder comme variable.

L'équation (1) étant différentiée sans faire d'hypothèse sur z, on a

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

Or les identités

$$x = \frac{x}{z} z, \quad y = \frac{y}{z} z$$

donnent

$$dx = z d\frac{x}{z} + \frac{x}{z} dz, \quad dy = z d\frac{y}{z} + \frac{y}{z} dz,$$

et par conséquent l'équation (2) devient

$$z\left[\frac{\partial f}{\partial x} d\frac{x}{z} + \frac{\partial f}{\partial y} d\frac{y}{z}\right] + \frac{dz}{z}\left[x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right] = 0;$$

mais, si n désigne le degré d'homogénéité de la fonction f, on a identiquement (n°s 84 et 136)

$$(3) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf(x, y, z) = 0:$$

donc il vient

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} d\frac{x}{z} + \frac{\partial f}{\partial y} d\frac{y}{z} = 0:$$

D'après les notations que nous adoptons ici, l'équation de la tangente à la courbe sera

$$\frac{Y}{Z} - \frac{y}{z} = \frac{d\frac{y}{z}}{d\frac{x}{z}}\left(\frac{X}{Z} - \frac{x}{z}\right),$$

ou, à cause de l'équation (4),

$$\left(\frac{X}{Z}-\frac{x}{z}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\frac{Y}{Z}-\frac{y}{z}\right)\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Ajoutons au premier membre la quantité identiquement nulle

$$\left(\frac{Z}{Z}-\frac{z}{z}\right)\frac{\partial f}{\partial z},$$

réduisons ensuite par le moyen de la formule (3) et chassons le dénominateur Z; l'équation de la tangente sera simplement

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0. \tag{5}$$

172. Exemple. — Considérons le cas des courbes du deuxième degré. On a ici

$$f(x, y, z)=ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'xz+2c'xy,$$

puis

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}=ax+c'y+b'z,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}=c'x+by+a'z,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}=b'x+a'y+cz,$$

l'équation de la tangente au point (x, y, z) sera donc

$$(ax+c'y+b'z)X+(c'x+by+a'z)Y+(b'x+a'y+cz)Z=0.$$

Si l'on veut revenir à la notation ordinaire des coordonnées, on fera $z=1$, $Z=1$.

173. Le résultat obtenu au n° 171 nous donne immédiatement le théorème suivant :

Théorème I. — *Les points de contact d'une courbe*

algébrique du degré n avec les tangentes qu'on peut lui mener par un point donné sont situés sur une seconde courbe algébrique de degré $n-1$.

En effet, si l'on suppose que la courbe donnée du degré n soit représentée par l'équation (1) du n° 171, les points de contact des tangentes menées à cette courbe par un point donné (X, Y, Z) satisferont à l'équation (5), et il est évident que cette équation (5) représente une courbe du degré $n-1$.

Supposons que le point donné occupe successivement toutes les positions sur une droite donnée; le précédent théorème subsistera pour chacune de ses positions, même quand le point donné sera situé à l'infini. On a donc cet autre théorème :

Théorème II. — *Les points de contact d'une courbe algébrique du degré n avec les tangentes qu'on peut lui mener parallèlement à une direction donnée sont situés sur une courbe de degré $n-1$.*

Remarque. — Ce dernier théorème se démontre très-simplement sans recourir à l'emploi des coordonnées homogènes; mais la démonstration du théorème I exige une transformation quand on fait usage des coordonnées ordinaires.

Recherche des points d'inflexion des courbes.

174. Désignons par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ les coordonnées rectilignes, par u une fonction homogène de x, y, z, et considérons la courbe représentée par l'équation

$$(1) \qquad u = 0.$$

Nous ferons, pour abréger,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = u_3,$$

puis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = u_{1,1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = u_{1,2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = u_{2,2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial z} = u_{1,3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u_3}{\partial z} = u_{3,3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{\partial u_3}{\partial y} = u_{2,3}.$$

En différentiant l'équation (1), on a, comme nous l'avons déjà trouvé,

$$(2) \qquad u_1 d\frac{x}{z} + u_2 d\frac{y}{z} = 0.$$

Soit n le degré d'homogénéité de la fonction u; u_1 et u_2 auront le degré $n-1$, et l'on aura

$$du_1 = z\left(u_{1,1} d\frac{x}{z} + u_{1,2} d\frac{y}{z}\right) + (n-1) u_1 \frac{dz}{z},$$

$$du_2 = z\left(u_{1,2} d\frac{x}{z} + u_{2,2} d\frac{y}{z}\right) + (n-1) u_2 \frac{dz}{z};$$

si donc on différentie l'équation (2) en regardant la différentielle de $\frac{x}{z}$ comme constante, et qu'on réduise le résultat par le moyen de la même équation (2), on aura

$$(3) \quad z\left[u_{1,1}\left(d\frac{x}{z}\right)^2 + 2u_{1,2}\left(d\frac{x}{z}\right)\left(d\frac{y}{z}\right) + u_{2,2}\left(d\frac{y}{z}\right)^2\right] + u_2 d^2\frac{y}{z} = 0.$$

Maintenant la condition des points d'inflexion est

$$(4) \qquad d^2\frac{y}{z} = 0,$$

et, si la fonction u_2 reste finie, elle réduit l'équation (3) à

$$(5)\qquad u_{1,1}\left(d\frac{x}{z}\right)^2 + 2u_{1,2}\left(d\frac{x}{z}\right)\left(d\frac{y}{z}\right) + u_{2,2}\left(d\frac{y}{z}\right)^2 = 0.$$

Mais il faut remarquer que l'équation (5) n'entraîne plus l'équation (4) quand on a $u_2 = 0$; dans ce cas on a aussi $u_1 = 0$, par l'équation (2), et $u_3 = 0$, par la formule identique

$$u_1 x + u_2 y + u_3 z = nu = 0.$$

Il résulte de là que la formule (5) convient à la fois aux points d'inflexion et aux points qui satisfont simultanément aux trois équations

$$(6)\qquad u_1 = 0,\quad u_2 = 0,\quad u_3 = 0.$$

Il reste à éliminer entre les équations (2) et (5) le rapport des différentielles $d\frac{x}{z}$, $d\frac{y}{z}$; on obtient immédiatement

$$(7)\qquad u_{1,1}u_2^2 - 2u_{1,2}u_1u_2 + u_{2,2}u_1^2 = 0,$$

mais cette équation peut être simplifiée. Effectivement, si, entre les quatre équations identiques

$$(8)\qquad nu = u_1 x + u_2 y + u_3 z$$

et

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} (n-1)u_1 = u_{1,1}x + u_{1,2}y + u_{1,3}z,\\ (n-1)u_2 = u_{1,2}x + u_{2,2}y + u_{2,3}z,\\ (n-1)u_3 = u_{1,3}x + u_{2,3}y + u_{3,3}z,\end{array}\right.$$

on élimine x, y et u_3, on trouvera

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} (n-1)^2[u_{1,1}u_2^2 - 2u_{1,2}u_1u_2 + u_{2,2}u_1^2] \\ \quad = n(n-1)u(u_{1,1}u_{2,2} - u_{1,2}^2) - z^2\mathrm{H}(u),\end{array}\right.$$

en posant, pour abréger,

$$H(u) = u_{1,3}(u_{1,2}u_{2,3} - u_{1,3}u_{2,2}) + u_{2,3}(u_{1,2}u_{1,3} - u_{1,1}u_{2,3}) + u_{3,3}(u_{1,1}u_{2,2} - u_{1,2}^2),$$

ou

$$(11)\qquad \left\{ \begin{aligned} H(u) = {} & u_{1,1}u_{2,2}u_{3,3} + 2u_{1,2}u_{1,3}u_{2,3} \\ & - u_{1,1}u_{2,3}^2 - u_{2,2}u_{1,3}^2 - u_{3,3}u_{1,2}^2. \end{aligned} \right.$$

Quelle que soit la forme de la fonction homogène u, le cas de $n = 1$ peut toujours être évité en multipliant u par une puissance de z. Alors, au moyen de la formule identique (10) et de l'équation $u = 0$, l'équation (7) se réduit à

$$(12)\qquad H(u) = 0.$$

175. Supposons que la courbe proposée soit algébrique et que u soit une fonction entière et homogène d'un degré entier et positif n; l'équation (7) sera du degré $3n - 4$, tandis que l'équation (12) sera seulement du degré $3(n-2)$ ou $3n - 6$. Si l'on considère les solutions imaginaires que peuvent admettre deux équations, comme répondant à un point imaginaire commun aux courbes représentées par ces deux équations, on pourra énoncer le théorème suivant dû à Hesse :

Théorème I. — *Les points d'inflexion d'une courbe algébrique du degré n sont situés sur une seconde courbe algébrique du degré* $3(n-2)$.

Et si les coefficients de la courbe demeurent indéterminés, de manière qu'il n'existe entre eux aucune relation, les équations (6) du numéro précédent n'admettront pas de solution commune ; par conséquent les points d'intersection des courbes (1) et (12) seront pour la courbe (1) des points d'inflexion. D'ailleurs on sait, par le théorème de Bezout, que l'élimination d'une variable entre les équations (1) et (12) conduit à une équation finale dont



le degré est égal au produit des degrés des deux équations; on a donc cet autre théorème :

Théorème II. — *Une courbe algébrique du degré n dont les coefficients demeurent indéterminés a* $3n(n-2)$ *points d'inflexion.*

On voit en particulier que les courbes du deuxième degré n'ont pas de points d'inflexion, ce qui est connu, et qu'une courbe du troisième degré a en général neuf points d'inflexion réels ou imaginaires.

La fonction $H(u)$, définie par l'équation (11), est le déterminant formé avec les neuf dérivées partielles du deuxième ordre de la fonction u, savoir :

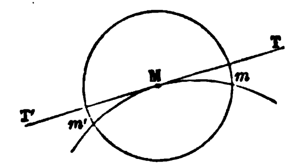
$$H(u) = \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{1,2} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{1,3} & u_{2,3} & u_{3,3} \end{vmatrix}.$$

Hesse l'a nommé le *déterminant* de la fonction u. Ce déterminant est le dénominateur commun des expressions que l'on obtiendrait en résolvant les équations (9) par rapport à x, y, z; il en résulte que l'équation (12) est toujours satisfaite par les valeurs de $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, susceptibles de satisfaire aux trois équations (6), proposition que nous avons déjà établie plus haut.

Des points singuliers des courbes planes.

176. Considérons un point M d'une courbe plane; menons la tangente TT′ au point M, traçons ensuite un contour fermé et convexe infiniment petit, dans l'intérieur duquel se trouve le point M; on peut prendre, si l'on veut, pour le contour dont il s'agit, la circonférence d'un cercle décrit du point M comme centre, avec un

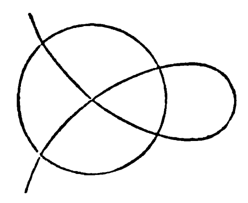
rayon infiniment petit. En général, le contour ainsi formé ne coupera la courbe qu'en deux points m, m', et les



rayons Mm, Mm' feront des angles infiniment petits avec les directions respectives MT, MT' de la tangente; par conséquent l'angle de ces rayons différera infiniment peu de deux angles droits.

Lorsque ces deux circonstances ne se présentent pas simultanément, le point M est dit un *point singulier*. Nous allons énumérer les diverses espèces de points singuliers que l'on peut rencontrer.

1° Points multiples. — On nomme *points multiples* ceux où se croisent plusieurs branches de courbe tan-

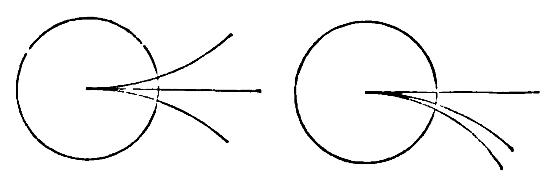


gentes ou non les unes aux autres. Le cercle décrit d'un point multiple comme centre, avec un rayon infiniment petit, coupe la courbe en plus de deux points.

2° Points de rebroussement. — On nomme *points de rebroussement* ceux où deux branches de courbe viennent s'arrêter et où elles ont une tangente commune. Le cercle décrit d'un point de rebroussement comme centre, avec un rayon infiniment petit, ne rencontre la courbe qu'en deux points; mais les rayons qui passent

par ces deux points font entre eux un angle infiniment petit.

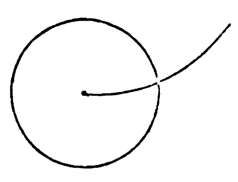
On distingue les points de rebroussement en deux



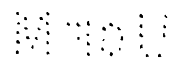
genres. Le rebroussement est dit du *premier genre* lorsque les deux branches de courbe sont situées de part et d'autre de la tangente commune; au contraire il est du *deuxième genre* quand les deux branches de courbe sont d'un même côté de la tangente.

3° Points isolés. — On nomme *points isolés* les points qui ne sont voisins d'aucun autre point de la courbe. Le cercle décrit d'un point isolé, comme centre, avec un rayon infiniment petit, ne rencontre la courbe en aucun point.

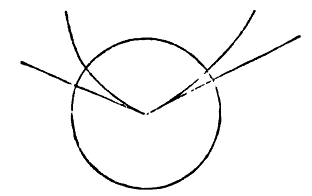
4° Points d'arrêt. — On nomme *point d'arrêt* un point où une branche unique d'une courbe vient brusquement s'arrêter. Le cercle décrit d'un point d'arrêt, comme centre, avec un rayon infiniment petit, ne rencontre la courbe qu'en un seul point.



5° Points saillants ou anguleux. — On nomme *point saillant* ou *anguleux* un point où viennent se terminer deux branches de courbe qui ont en ce point des tangentes distinctes. Le cercle décrit d'un point saillant,



comme centre, avec un rayon infiniment petit, coupe la courbe en deux points; mais les rayons qui passent par



ces points font entre eux un angle qui diffère de deux droits ou de zéro d'une quantité finie.

Nous allons présenter ici un exemple pour chacune des cinq espèces de points singuliers que nous venons de mentionner.

177. Exemple d'un point double ou d'un point isolé. — Considérons la courbe représentée en coordonnées rectilignes par l'équation

$$y = \varphi(x) + (x-a)\left(\frac{x-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}};$$

$\varphi(x)$ désigne une fonction de x *bien déterminée*, qui reste réelle et finie; a, b, c sont des lignes positives données; enfin $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible dont le dénominateur est pair.

Le facteur $\left(\frac{x-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}}$ ayant deux valeurs égales et de signes contraires, la courbe dont nous nous occupons est formée de deux branches auxquelles appartiennent respectivement les équations

$$y = \varphi(x) + (x-a)\left(\frac{x-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}},$$

$$y = \varphi(x) - (x-a)\left(\frac{x-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}},$$

où l'on prend positivement l'expression $\left(\frac{x-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}}$. Les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ relatives à ces deux branches de courbe sont données par la formule

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \pm \left(\frac{x-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}} \pm \frac{p}{q}\,\frac{x-a}{c}\left(\frac{x-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}-1},$$

et, pour $x=a$, on a

$$y=\varphi(a),\quad \frac{dy}{dx}=\varphi'(a)\pm\left(\frac{a-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Supposons $a>b$. Dans ce cas, les deux branches de courbe se réunissent en un point dont l'abscisse est a, mais elles ne s'y arrêtent pas brusquement, puisque l'ordonnée de chacune d'elles reste réelle quand on pose $x=a\pm h$. En outre, ces branches de courbe ont des tangentes distinctes au point où elles se rencontrent; on voit que celui-ci est un point double.

Dans le cas de $a<b$, la valeur précédente de $\frac{dy}{dx}$ est imaginaire; il n'y a donc pas de tangente au point dont l'abscisse est a. La valeur de y relative à chaque branche de courbe devient imaginaire pour $x=a\pm h$, et en conséquence le point qui a pour coordonnées $x=a$, $y=\varphi(a)$ est un point isolé.

178. Exemple d'un point de rebroussement du premier ou du deuxième genre. — Considérons la courbe représentée par l'équation

$$y=\varphi(x)\pm(x-a)^{\frac{p}{q}}\psi(x),$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant des fonctions bien déterminées qui

demeurent réelles et finies; a une constante donnée; $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible positive et supérieure à 1, dont le dénominateur est pair. Comme dans l'exemple précédent, la courbe peut être regardée comme composée de deux branches qui répondent respectivement au signe $+$ et au signe $-$ du dernier terme de l'équation.

Les deux valeurs de y sont réelles et inégales pour $x > a$, elles deviennent égales pour $x = a$, et imaginaires pour $x < a$. Ainsi les deux branches de courbe s'arrêtent l'une et l'autre au point dont l'abscisse est a.

L'expression de $\frac{dy}{dx}$ est

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \pm (x-a)^{\frac{p}{q}} \psi'(x) \pm \frac{p}{q}(x-a)^{\frac{p}{q}-1} \psi(x),$$

et, pour $x = a$, elle se réduit, à cause de $\frac{p}{q} > 1$, à la valeur unique $\varphi'(a)$. Les deux branches de courbe ont donc même tangente au point où elles se rencontrent; par conséquent, celui-ci est un point de rebroussement.

Il est évident (n° **168**) que le rebroussement sera du premier genre ou du deuxième genre, selon que les valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui répondent aux deux branches de courbe seront de signes contraires ou de même signe pour $x = a + h$, h étant un infiniment petit; l'expression de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''(x) \pm (x-a)^{\frac{p}{q}} \psi''(x) \pm 2\frac{p}{q}(x-a)^{\frac{p}{q}-1} \psi'(x)$$
$$\pm \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} - 1\right)(x-a)^{\frac{p}{q}-2} \psi(x).$$

Lorsque $\frac{p}{q}$ est > 2, les deux valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ diffèrent

infiniment peu de $\varphi''(a)$, pour $x = a + h$; donc, si $\varphi''(a)$ n'est pas nulle, le rebroussement est du deuxième genre. Cette conclusion subsiste dans le cas où $\varphi''(a)$ est nulle, pourvu que l'ordre infinitésimal de $\varphi''(a+h)$ soit inférieur à $\frac{p}{q} - 2$.

Lorsque $\frac{p}{q}$ est < 2, les deux valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont infinies pour $x = a$, et il est évident qu'elles sont de signes contraires pour $x = a + h$; donc le rebroussement est du premier genre.

Les courbes représentées par les équations

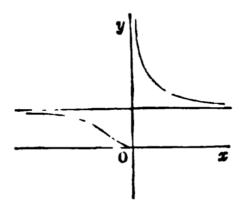
$$y = x + \sqrt{x^3}, \quad y = x^2 + \sqrt{x^5}$$

font partie de la classe de celles que nous venons de considérer. L'origine des coordonnées est un point de rebroussement du premier genre, pour la première courbe, et un point de rebroussement du deuxième genre pour la seconde.

179. Exemple d'un point d'arrêt. — La courbe représentée par l'équation

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

offre l'exemple d'un point d'arrêt, à l'origine des coordonnées. Si l'on fait croître x de 0 à $+\infty$, l'ordonnée y



décroît de $+\infty$ à $+1$, et l'on a une première branche de courbe située dans l'angle des coordonnées positives;

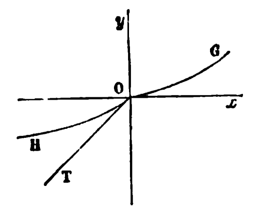
cette branche de courbe a pour asymptotes l'axe des y et une parallèle à l'axe des x répondant à une ordonnée égale à 1. Si l'on fait décroître x de 0 à $-\infty$, la valeur de y croît de 0 à $+1$, et l'on a ainsi une deuxième branche de courbe qui s'arrête brusquement à l'origine.

Il faut remarquer que la fonction y devient discontinue quand x varie de $-h$ à $+h$, h étant infiniment petit; elle passe brusquement d'une valeur infiniment petite à une valeur infiniment grande, et, pour $x = 0$, elle a les deux valeurs 0 et ∞.

180. Exemple d'un point saillant. — La courbe représentée par l'équation

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

offre l'exemple d'un point saillant à l'origine des coordonnées.



Pour avoir la tangente à l'origine, il suffit (n° 163) de prendre la limite du rapport

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

pour $x = 0$. Or, quand x tend vers zéro, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers 0 ou vers $+\infty$, suivant que x est positive ou négative; il y a donc, à l'origine, deux tangentes dont les coefficients

d'inclinaison sont respectivement o et 1. La courbe est ainsi composée de deux branches : l'une, OG, est située dans l'angle des coordonnées positives et elle est tangente, à l'origine, à l'axe des abscisses ; l'autre branche, OH, est située dans l'angle des coordonnées négatives et a pour tangente, à l'origine, la bissectrice OT de cet angle ; donc l'origine est un point saillant de la courbe.

Caractère analytique des points singuliers.

181. Nous allons établir ici un théorème général qui embrasse une classe étendue de courbes et qui fait connaître une condition commune à laquelle doivent satisfaire tous les points singuliers.

Théorème. — *Soit $f(x, y)$ une fonction des variables x, y, qui reste continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, et qui prenne une valeur bien déterminée quand on donne à x et à y des valeurs déterminées. Si x_0, y_0 désignent les coordonnées rectilignes d'un point singulier de la courbe représentée par l'équation*

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

admettront toujours la solution $x = x_0$, $y = y_0$.

En effet, désignons par x_0, y_0 les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe, et par θ l'angle des axes coordonnés ; décrivons un cercle du point M comme centre, avec le rayon infiniment petit ρ, et nommons $x_0 + h$, $y_0 + k$ les coordonnées d'un point m de la circonférence. On aura

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

et la condition pour que le point m appartienne à la courbe sera

$$f(x_0+h, y_0+k)=0 \quad \text{ou} \quad f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=0.$$

Au moyen de la formule de Taylor, cette équation devient

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 k + R_2 = 0,$$

en posant

$$(4) \quad R_2 = \frac{1}{1.2}\left[h^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_1 + 2hk\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_1 + k^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_1\right];$$

l'indice o exprime ici qu'il faut remarquer x et y par x_0 et y_0; l'indice 1 indique que x et y doivent être remplacées par des valeurs comprises respectivement entre x_0 et x_0+h, y_0 et y_0+k.

Soit ω l'angle que le rayon $Mm=\rho$ fait avec l'axe des x, on aura

$$h=\rho\frac{\sin(\theta-\omega)}{\sin\theta}, \quad k=\rho\frac{\sin\omega}{\sin\theta},$$

et l'équation (3) divisée par ρ deviendra

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \frac{\sin(\theta-\omega)}{\sin\theta} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \frac{\sin\omega}{\sin\theta} + \frac{R_2}{\rho} = 0;$$

il faut remarquer que $\frac{R_2}{\rho}$ s'annule avec ρ. Cela posé, si $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ ne sont pas nulles simultanément, on pourra trouver une quantité positive M et un angle α, tels que l'on ait

$$(6) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = -M\sin\alpha, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = +M\sin(\theta-\alpha),$$

car M et α ne sont autre chose que les coordonnées po-

laires du point qui aurait les coordonnées rectilignes $\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ et $-\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$. Au moyen des formules (6), l'équation (5) devient

$$M\sin(\omega-\alpha)+\frac{R_2}{\rho}=0, \tag{7}$$

et, comme il est permis de négliger dans ω les multiples de la circonférence, cette équation ne peut être satisfaite que si ω diffère infiniment peu de α ou de $\pi+\alpha$. Donc, pour connaître le nombre des racines ω de notre équation, il suffit d'examiner comment varie son premier membre

$$M\sin(\omega-\alpha)+\frac{R_2}{\rho}, \tag{8}$$

quand ω varie de $\alpha-\varepsilon$ à $\alpha+\varepsilon$ ou de $(\pi+\alpha)-\varepsilon$ à $(\pi+\alpha)+\varepsilon$, ε étant une quantité aussi petite que l'on voudra, mais déterminée.

Or, d'après notre hypothèse, la quantité

$$R_2=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0-k\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$$

est une fonction continue de h et de k; donc $\frac{R_2}{\rho}$ est une fonction continue de ω; en outre cette fonction s'annule pour $\rho=0$, quel que soit ω; par conséquent, la même chose a lieu à l'égard de la dérivée $\frac{d\frac{R_2}{\rho}}{d\omega}$. Cela étant, la dérivée de l'expression (8) par rapport à ω est

$$M\cos(\omega-\alpha)+\frac{d\frac{R_2}{\rho}}{d\omega},$$

et elle diffère aussi peu que l'on veut de $+M$ ou de $-M$, lorsque $\omega-\alpha$ diffère suffisamment peu de 0 ou

de π. En conséquence, la fonction (8) est croissante quand ω croît de $\alpha - \varepsilon$ à $\alpha + \varepsilon$, et elle est décroissante quand ω croît de $\pi + \alpha - \varepsilon$ à $\pi + \alpha + \varepsilon$; en outre, cette fonction change de signe, dans l'un et l'autre cas; donc elle s'annule entre les deux limites.

Il résulte de là que, si les équations (2) n'admettent pas la solution commune $x = x_0$, $y = y_0$, l'équation (7) aura deux racines ω, l'une infiniment peu différente de α, l'autre infiniment peu différente de $\pi + \alpha$, et qu'elle n'aura aucune autre racine. Ainsi le cercle décrit du point $M(x_0, y_0)$ comme centre, avec le rayon ρ, ne coupera la courbe qu'en deux points m, m', et les rayons Mm, Mm' feront des angles infiniment petits, l'un avec l'une des directions de la tangente en M, l'autre avec la direction opposée. Il s'ensuit que le point M ne sera pas un point singulier, ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. — Si l'on adopte le système des coordonnées homogènes, les coordonnées $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ des points singuliers de la courbe représentée par l'équation homogène

$$u = f(x, y, z) = 0$$

annuleront les trois dérivées partielles du premier ordre u_1, u_2, u_3, car les équations $u = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ entraînent $u_3 = 0$. Il en résulte que le déterminant de la fonction u (n° 175) s'annule pour tous les points singuliers.

Recherche de la nature des points singuliers.

182. D'après ce qui précède, les coordonnées des points singuliers de la courbe

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

doivent satisfaire aux deux équations

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Nous admettrons dans ce qui va suivre que toutes celles des dérivées partielles de la fonction $f(x, y)$ que nous aurons à considérer restent continues. Soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point M de la courbe (1) qui satisfassent en même temps aux équations (2), mais qui ne vérifient pas à la fois les trois équations

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Désignons, comme précédemment, par $x_0 + h, y_0 + k$ les coordonnées d'un point m de la circonférence décrite du point M comme centre, avec le rayon infiniment petit ρ. La condition, pour que ce point m soit sur la courbe donnée, sera

$$f(x_0 + h,\ y_0 + k) = 0,$$

ou, en développant par la formule de Taylor et en supprimant les termes qui sont nuls en vertu de nos hypothèses,

$$(4) \quad \frac{1}{1.2}\left[h^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2hk\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_0 + k^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right] + R_3 = 0;$$

R_3 désigne, conformément à notre notation habituelle, le reste de la série arrêtée au troisième terme.

Si l'on a

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_0^2 > 0,$$

le trinôme entre crochets, dans l'équation (4), ne sera jamais nul, et comme sa valeur absolue est supérieure à celle de R_3, lorsque h et k sont suffisamment petits, il

est évident que l'équation (4) ne pourra pas être satisfaite. Il s'ensuit que la circonférence de rayon ρ ne rencontre pas la courbe, et, par conséquent, le point M est un *point isolé*.

183. Lorsque l'inégalité (5) n'a pas lieu, les racines t de l'équation

$$(6)\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 t + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 t^2 = 0$$

sont réelles, et elles peuvent être représentées par

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},\quad \frac{\sin 6}{\sin(\theta-6)},$$

θ étant toujours l'angle des axes, α et 6 des angles compris entre zéro et π; on peut alors mettre l'équation (4) sous la forme

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \left[k - h\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}\right]\left[k - h\frac{\sin 6}{\sin(\theta-6)}\right] + R_3 = 0.$$

Nous remplacerons h et k par leurs valeurs $\frac{\rho\sin(\theta-\omega)}{\sin\theta}$, $\frac{\rho\sin\omega}{\sin\theta}$ déjà employées au numéro précédent; nous ferons en outre, pour abréger l'écriture,

$$\sqrt{\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 - 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 \cos\theta + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right]^2 + 4\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right]\sin^2\theta}$$
$$= M \times 2\sin^2\theta,$$

en convenant de prendre le radical avec le signe du produit $\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-6)$. L'équation (4), divisée par ρ^2, devient alors

$$(7)\qquad M\sin(\omega-\alpha)\sin(\omega-6) + \frac{R_3}{\rho^2} = 0,$$

$\frac{R_3}{\rho^2}$ s'annulant avec ρ.

Supposons d'abord que les racines de l'équation (6) soient inégales; dans ce cas, on a

$$(8)\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0^2 < 0,$$

et les angles α et 6 ne sont ni égaux entre eux ni supplémentaires. Il est évident que l'équation (7) ne peut être satisfaite que par des valeurs de ω infiniment voisines de l'un des angles α, $\pi+\alpha$, 6, $\pi+6$; d'ailleurs, si l'on désigne par ω_0 l'un de ses quatre angles, et par ε une quantité positive déterminée aussi petite que l'on voudra, le premier membre de l'équation (7) changera de signe quand on fera croître ω de $\omega_0 - \varepsilon$ à $\omega_0 + \varepsilon$; donc il y a au moins une racine dans cet intervalle. Mais je dis qu'il n'y en a qu'une seule. En effet, la dérivée du premier membre de l'équation (7) par rapport à ω est

$$\mathrm{M}[\cos(\omega-\alpha)\sin(\omega-\beta)+\sin(\omega-\alpha)\cos(\omega-6)]+\frac{d\,\frac{\mathrm{R}_3}{\rho^2}}{d\omega},$$

et elle différera aussi peu que l'on voudra de $\pm\mathrm{M}\sin(\alpha-6)$, si ε est suffisamment petit. Comme R_3 est une fonction continue de ω, en vertu de nos hypothèses, nous pouvons conclure que le premier membre de l'équation (7) est une fonction constamment croissante ou constamment décroissante, dans l'intervalle de $\omega_0 - \varepsilon$ à $\omega_0 + \varepsilon$; donc cette équation n'a que quatre racines, lesquelles diffèrent infiniment peu des angles respectifs α, $\pi+\alpha$, 6, $\pi+6$.

Le cercle décrit du point M comme centre, avec le rayon infiniment petit ρ, coupe donc la courbe en quatre points; et, parmi les quatre rayons qui passent par ces points, il y en a deux qui font respectivement des angles infiniment petits avec les deux directions de la droite inclinée de l'angle α sur l'axe des x, tandis que les deux autres rayons font des angles infiniment petits avec les deux di-

rections de la droite qui répond à l'angle β. Dans le cas que nous examinons, le point M est un *point double*.

184. Supposons maintenant que les racines de l'équation (6) soient égales entre elles. Dans ce cas, on a

$$(9)\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_0^2 = 0,$$

les angles α, β sont égaux entre eux, et l'équation (7) devient

$$(10)\qquad \mathrm{M} \sin^2(\omega - \alpha) + \frac{\mathrm{R}_3}{\rho^2} = 0.$$

Mais il est ici nécessaire de prendre un terme de plus dans le développement fourni par la formule de Taylor. On a

$$(11)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{R}_3 = \frac{1}{1.2.3} \Bigg[& h^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 + 3h^2 k \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y}\right)_0 \\ & + 3hk^2 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}\right)_0 + k^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0 \Bigg] + \mathrm{R}_4. \end{aligned} \right.$$

Si la partie entre crochets de cette valeur de R_3 ne s'annule pas pour $\omega = \alpha$ ou pour $\omega = \pi + \alpha$, elle conservera le même signe $+$ ou $-$ quand ω croîtra de $\alpha - \varepsilon$ à $\alpha + \varepsilon$, tandis qu'elle aura constamment le signe opposé $-$ ou $+$ quand ω croîtra de $\pi + \alpha - \varepsilon$ à $\pi + \alpha + \varepsilon$; d'ailleurs ce signe sera celui de R_3, puisque ρ est supposé infiniment petit. Il résulte de là que l'équation (10) n'a que des racines infiniment voisines de l'angle α, ou que des racines infiniment voisines de l'angle $\pi + \alpha$. Les deux premières dérivées du premier membre de l'équation (10) sont

$$\mathrm{M} \sin 2(\omega - \alpha) + \frac{d \dfrac{\mathrm{R}_3}{\rho^2}}{d\omega}, \qquad 2\mathrm{M} \cos 2(\omega - \alpha) + \frac{d^2 \dfrac{\mathrm{R}_3}{\rho^2}}{d\omega^2};$$

lorsque ω diffère peu de α ou de $\pi + \alpha$, la dérivée du deuxième ordre diffère peu de $+2\mathrm{M}$; donc la dérivée du premier ordre est constamment croissante, et elle ne peut

s'annuler qu'une seule fois; il s'ensuit que l'équation (10) ne peut avoir plus de deux racines; enfin ces deux racines existent effectivement, puisque R_3 est nécessairement négatif quand on donne à ω l'une des deux valeurs α, $\pi + \alpha$.

Dans le cas que nous examinons, le cercle décrit du point M comme centre, avec un rayon infiniment petit, coupe la courbe en deux points, et les rayons qui aboutissent à ces points, situés de part et d'autre de la droite inclinée de l'angle α sur l'axe des x, forment avec l'une des deux directions de cette droite des angles infiniment petits. Donc le point M est un *point de rebroussement du premier genre*.

185. Il nous reste à examiner le cas où la partie entre crochets de l'équation (11) s'annule en même temps que $\sin(\omega - \alpha)$. Ici, comme dans le cas précédent, l'équation (10) ne peut être satisfaite que par des valeurs de ω infiniment voisines de α ou de $\pi + \alpha$; donc il ne peut y avoir, au point M de la courbe, qu'une seule tangente et celle-ci est inclinée sur l'axe des x de la quantité α. Pour reconnaître la nature du point M, il convient d'abandonner la considération du cercle de rayon ρ et de lui substituer deux parallèles à l'axe des y, infiniment voisines et situées à des distances égales de M. Nous ferons $k = th$ et nous poserons

$$f_2(t) = \frac{1}{1.2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2t\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + t^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right],$$

$$f_3(t) = \frac{1}{1.2.3}\left[\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 + 3t\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\right)_0 + 3t^2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\right)_0 + t^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0\right],$$

$$f_4(t) = \frac{1}{1.2.3.4}\left[\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 + 4t\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\,\partial y}\right)_0 + 6t^2\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\,\partial y^2}\right)_0 + 4t^3\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x\,\partial y^3}\right)_0 + t^4\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_0\right],$$

....

Si l'on arrête au cinquième terme le développement de $f(x_0+h, y_0+k)$, le reste pourra être représenté par

$$R_5 = h^5[f_5(t) + \eta],$$

η désignant une quantité infiniment petite; par conséquent l'équation qui exprime que le point (x_0+h, y_0+k) appartient à la courbe proposée sera

$$(12) \quad f_2(t) + hf_3(t) + h^2 f_4(t) + h^3[f_5(t) + \eta] = 0.$$

Dans le cas qui nous occupe, les deux racines de l'équation $f_2(t) = 0$ sont égales entre elles, et en désignant par t_1 leur valeur, on a $f_3(t_1) = 0$; d'après nos premières notations, t_1 est égal au rapport $\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$, et les racines réelles que l'équation (12) peut admettre sont infiniment peu différentes de t_1. Posons

$$(13) \qquad t = t_1 + \lambda h,$$

λ étant une nouvelle inconnue que nous substituerons à t; on aura

$$f_2(t) = \frac{\lambda^2 h^2}{1.2} f''_2(t_1) + \ldots,$$

$$f_3(t) = \frac{\lambda h}{1} f'_3(t) + \frac{\lambda^2 h^2}{1.2} f''_3(t_1) + \ldots,$$

$$f_4(t) = f_4(t_1) + \frac{\lambda h}{1} f'_4(t_1) + \ldots,$$

$$f_5(t) = f_5(t_1) + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et si l'on fait, en outre,

$$F(\lambda) = \frac{f''_2(t_1)}{1.2}\lambda^2 + \frac{f'_3(t_1)}{1}\lambda + f_4(t_1),$$

$$F_1(\lambda) = \frac{f''_3(t_1)}{1.2}\lambda^2 + \frac{f'_4(t_1)}{1}\lambda + f_5(t_1).$$

l'équation (12) deviendra

$$(14) \qquad F(\lambda) + h[F_1(\lambda) + \eta] = 0,$$

η s'annulant avec h.

Si les racines de l'équation

$$(15) \qquad F(\lambda) = 0$$

sont imaginaires, il est évident que l'équation (14) n'admettra pas de racines réelles; il n'y aura donc pas de tangente au point M de la courbe, et celui-ci sera un *point isolé*.

Si les racines de l'équation (15) sont réelles et inégales, et qu'on les désigne par λ', λ'', il est évident que le premier membre de l'équation (14) changera de signe, quel que soit le signe de h, quand on fera varier λ dans le voisinage de λ' ou de λ''. L'équation (14) a donc deux racines réelles λ'_1, λ''_1, et elle en a également deux autres λ'_2, λ''_2 quand on écrit $-h$ au lieu de h; il résulte de là qu'il existe quatre points de la courbe pour lesquels on a, d'après la formule (13),

$$k = t_1 h + \lambda'_1 h^2, \qquad k = t_1 h + \lambda'_2 h^2,$$
$$k = -t_1 h + \lambda''_1 h^2, \qquad k = -t_1 h + \lambda''_2 h^2.$$

Deux des quatre rayons qui joignent ces points au point M font des angles infiniment petits avec l'une des directions de la droite qui a le coefficient d'inclinaison t_1, tandis que les deux autres rayons font des angles infiniment petits avec la direction opposée. Il s'ensuit que le point M est *un point double où se croisent deux branches de courbe qui ont en ce point la même tangente*.

Enfin, si les racines de l'équation (15) sont égales, désignons par λ' leur valeur, et supposons que l'équation

$$(16) \qquad F_1(\lambda) = 0$$

n'admette pas la racine λ'; l'équation (14) prendra la forme

$$(\lambda - \lambda')^2 + 2h\,\frac{F_1(\lambda) + \eta}{f''_2(t_1)} = 0.$$

Cette équation a deux racines réelles λ'_1, λ'_2, infiniment peu différentes de λ', pourvu que h ait un signe contraire à celui de $\frac{F_1(\lambda')}{f''_2(t)}$; mais si l'on donne à h le signe de cette quantité, l'équation n'admettra pas de racines réelles. Il s'ensuit qu'il existe deux points de la courbe, pour lesquels on a

$$k = t_1 h + \lambda'_1 h^2, \quad k = t_1 h + \lambda'_2 h^2;$$

d'ailleurs, si λ' n'est pas nulle, λ'_1 et λ'_2 sont de même signe; donc les rayons qui joignent les deux points au point M sont situés d'un même côté de la tangente et font avec l'une des directions de celle-ci des angles infiniment petits. Le point M est donc un *point de rebroussement du deuxième genre.*

Cette conclusion ne subsiste pas dans le cas de $\lambda' = 0$; le rebroussement est alors du *premier genre;* elle peut aussi être en défaut dans le cas où λ' est racine de l'équation (16). Mais il est facile de voir que le point M est toujours un point double ou un point isolé, quand il n'est pas un point de rebroussement.

186. Il resterait à examiner le cas où les trois dérivées partielles du deuxième ordre de la fonction $f(x, y)$ s'annulent simultanément pour les coordonnées x_0, y_0 du point M; mais à cet égard je me bornerai à indiquer succinctement le résultat principal.

En général, si les valeurs x_0, y_0 annulent toutes les dérivées partielles de la fonction f, jusqu'à celles de l'ordre $n - 1$ inclusivement, la condition pour que $x_0 + h$,

y_0+k soient les coordonnées d'un point de la courbe sera, en conservant les notations du n° 183,

$$\Phi(\omega)\sin(\omega-\alpha_1)\sin(\omega-\alpha_2)\ldots\sin(\omega-\alpha_i)+\frac{R_{n+1}}{\rho^i}=0;$$

$\frac{R_{n+1}}{\rho^i}$ s'annule avec ρ, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ désignent des angles réels dont le nombre i est égal à n ou égal à n diminué d'un nombre pair; enfin $\Phi(\omega)$ se réduit à une constante quand $i=n$, et elle est dans le cas contraire une fonction qui ne s'annule pour aucune valeur de ω. On voit de suite que, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ sont des angles inégaux, le point M sera pour la courbe un point multiple de l'ordre i, c'est-à-dire que i branches de courbe se couperont en ce point. Il s'ensuit que, pour un point multiple de l'ordre n, il est *nécessaire, mais non suffisant*, que les dérivées partielles de la fonction f des ordres inférieurs à n s'annulent toutes pour les coordonnées du point M.

Dans l'hypothèse actuelle, les coefficients d'inclinaison des tangentes aux branches de courbe qui se croisent en M font partie des racines t de l'équation

$$\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_0+\frac{n}{1}t\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}\right)_0+\frac{n(n-1)}{1.2}t^2\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}\right)_0+\ldots$$
$$+\frac{n}{1}t^{n-1}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x\,\partial y^{n-1}}\right)_0+t^n\left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right)_0=0.$$

Si l'on supprime l'indice zéro, et que l'on écrive $\frac{dy}{dx}$ au lieu de t, la précédente équation coïncidera avec celle que l'on obtient en différentiant n fois l'équation

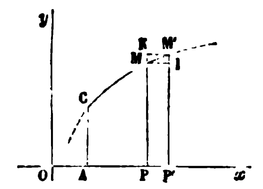
$$f(x,y)=0,$$

et de laquelle disparaissent en vertu de nos hypothèses toutes les dérivées $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \cdots$ des ordres supérieurs à 1. C'est cette équation qui détermine ici chacune des

valeurs de $\frac{dy}{dx}$; pour avoir la valeur correspondante de $\frac{d^2y}{dx^2}$, il faut différentier une fois de plus l'équation proposée, et ainsi de suite. Cette observation sert de complément à la règle générale que nous avons donnée pour la différentiation des fonctions implicites.

Différentielle de l'aire d'une courbe plane.

187. Considérons une courbe plane rapportée à deux axes de coordonnées faisant entre eux un angle θ; désignons par u l'aire CAPM comprise entre un arc CM, l'axe des x et les coordonnées CA, MP des extrémités CM.



Si l'on regarde l'ordonnée CA comme fixe et l'ordonnée $MP = y$ qui répond à l'abscisse $OP = x$ comme variable, l'aire u sera une fonction de x; nous nous proposons de trouver la différentielle de cette fonction.

Soit $M'P' = y + \Delta y$ l'ordonnée qui répond à l'abscisse $OP' = x + \Delta x$; on peut supposer Δx assez petit, pour que l'ordonnée de la courbe aille constamment en croissant ou constamment en décroissant quand on passe du point M au point M'. Alors, si l'on mène MI et M'K parallèles à l'axe des x, l'accroissement $\Delta u = MPP'M'$ de l'aire u sera compris entre les aires $y \Delta x \sin\theta$, $(y + \Delta y)\Delta x \sin\theta$ des parallélogrammes MPP'I, KPP'M'. Or la différence $\Delta y\, \Delta x \sin\theta$ de ces deux parallélogrammes

est infiniment petite, par rapport à chacun d'eux, quand Δx devient infiniment petit; donc on a

$$\Delta u = y\,\Delta x \sin\theta + \varepsilon\,\Delta x,$$

ε s'annulant avec Δx. On tire de là

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = y \sin\theta + \varepsilon,$$

et, en passant à la limite,

$$\frac{du}{dx} = y \sin\theta, \quad \text{d'où} \quad du = y\,dx \sin\theta.$$

Dans le cas des axes rectangulaires, cette formule se réduit à

$$du = y\,dx.$$

188. Divisons la partie AP de l'axe des abscisses en n parties égales ou inégales, mais qui deviennent toutes infiniment petites quand n devient infiniment grand, et désignons par $x_0, x_1, \ldots, x_n$ le abscisses des points de division, par $y_0, y_1, \ldots, y_n$ les ordonnées correspondantes; x_n et y_n ne sont autre chose que les coordonnées x, y du point M. Nous avons vu (n° 10) que l'on a

$$u = \sin\theta \lim \sum (x_i - x_{i-1})\,y_i,$$

et il en résulte, d'après ce qui précède, que la limite de la somme

$$\sum (x_i - x_{i-1})\,y_i,$$

somme qu'on peut aussi représenter par

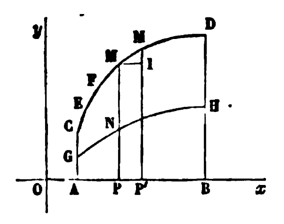
$$\sum y\,\Delta x,$$

est une fonction de x dont la différentielle est $y\,dx$. Ainsi que nous l'avons déjà remarqué au n° 10, ce résultat

subsiste lors même que y changerait de signe dans le passage du point C au point M, pourvu que l'on considère comme négatives les parties de l'aire considérée qui sont situées du côté des y négatives.

Différentielle de la longueur d'un arc de courbe plane.

189. Soit CD un arc de courbe plane que nous rapporterons à deux axes rectangulaires Ox et Oy. Inscrivons dans l'arc CD une ligne polygonale CEFMM'D d'un nombre n de côtés; désignons par P le périmètre de cette ligne polygonale, par x, y les coordonnées d'un



sommet quelconque M et par $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ les coordonnées du sommet suivant M'. On aura

$$MM' = \sqrt{\overline{MI}^2 + \overline{M'I}^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}},$$

et, comme $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne diffère de $\frac{dy}{dx}$ que d'une quantité qui s'évanouit avec Δx, on peut écrire

$$MM' = \Delta x\left(\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} + \varepsilon\right),$$

ε désignant une quantité qui s'annule avec Δx. Cette formule se rapportera à chacun des côtés de la ligne polygonale, si l'on prend respectivement pour x et y les coordonnées des sommets successifs; on a donc, en fai-

sant la somme de tous les côtés tels que MM',

$$(1)\qquad P = \sum \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,\Delta x + \sum \varepsilon \Delta x.$$

Supposons maintenant que le nombre n des côtés de notre ligne polygonale augmente indéfiniment, et que chacun des côtés de cette ligne tende vers zéro. Comme la somme $\sum \Delta x$ a une valeur finie et constante qui est la différence AB des abscisses des extrémités de l'arc CD, on aura (n° 9)

$$(2)\qquad \lim \sum \varepsilon \Delta x = 0.$$

En outre, si l'on prend x pour variable indépendante et que l'on construise la courbe dont l'ordonnée Y est déterminée en fonction de x, par l'équation

$$Y = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

que GH soit la partie de cette courbe comprise entre les ordonnées CA, DB, et que l'on désigne par S l'aire GABH, on aura (n° 188)

$$(3)\qquad \lim \sum Y \Delta x = \lim \sum \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,\Delta x = S;$$

donc la formule (1) donnera, à cause des égalités (2) et (3),

$$(4)\qquad \lim P = S.$$

On voit ainsi que *le périmètre d'une ligne polygonale inscrite dans un arc donné d'une courbe plane tend vers une limite déterminée lorsque tous les côtés tendent vers zéro; en outre, cette limite est indépendante de la loi suivant laquelle décroissent les côtés du polygone.*

La limite S dont nous venons de dénoncer l'existence est dite la *longueur de l'arc de courbe* CD.

Maintenant, si nous désignons par s la longueur de l'arc CM dont l'extrémité C est fixe, tandis que l'extrémité M qui répond à l'abscisse x est variable, s sera une fonction de x; il est aisé d'avoir la différentielle de cette fonction. Effectivement, d'après ce qui précède, l'arc s est égal à l'aire GAPN comprise entre la courbe GH, l'axe des x et les ordonnées des points C et M; cette aire a pour différentielle (nº 187) $Y dx$ ou $\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}dx$; on a donc

$$ds = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,dx, \quad \text{ou} \quad ds = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

190. La formule que nous venons d'établir permet de démontrer la proposition suivante : *Le rapport d'un arc de courbe infiniment petit à sa corde a pour limite l'unité.*

Considérons l'arc MM′ qui est l'accroissement Δs de l'arc CM $= s$, et désignons par c la corde de MM′. On aura

$$\frac{\Delta s}{c} = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}},$$

et, en passant à la limite,

$$\lim \frac{\Delta s}{c} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}} = \frac{ds}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = 1.$$

Cette propriété peut être employée pour trouver la différentielle d'un arc de courbe, quand aux coordonnées rectangulaires on substitue d'autres variables. Supposons,

par exemple, qu'on demande la différentielle de l'arc d'une courbe rapportée à des axes obliques faisant entre eux l'angle θ. Donnons à x l'accroissement Δx et soient Δy, Δs les accroissements correspondants de y et de s; la corde de l'arc Δs a pour expression

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + 2\Delta x\,\Delta y \cos\theta + \Delta y^2},$$

et, puisque le rapport de c à Δs a pour limite l'unité, on peut substituer c à Δs (n° 8) quand on se propose de déterminer la limite du rapport $\frac{\Delta s}{\Delta x}$. On a donc

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim \sqrt{1 + 2\frac{\Delta y}{\Delta x}\cos\theta + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$$

ou

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + 2\frac{dy}{dx}\cos\theta + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

et

$$ds = \sqrt{dx^2 + 2dx\,dy\cos\theta + dy^2}.$$

191. L'arc s, compté à partir d'une origine arbitraire mais déterminée, est l'une des variables qu'il y a lieu d'introduire dans l'analyse des propriétés des courbes. La formule

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

qui se rapporte au cas des coordonnées rectangulaires, laisse indéterminé le signe de ds; ce signe doit toujours être + ou — suivant que l'arc s croît ou décroît quand la variable indépendante augmente

L'introduction de la différentielle ds fournit des expressions simples pour le cosinus et le sinus de l'angle α que fait la tangente de la courbe avec l'axe des x; il importe de définir avec précision l'angle dont il s'agit. Imaginons que, par le point M d'une courbe, on mène la tangente et

qu'on y transporte les axes des x et des y parallèlement à eux-mêmes, puis considérons une droite mobile coïncidant à l'origine du mouvement avec la partie positive de l'axe des x, s'élevant ensuite vers la partie positive de l'axe des y et continuant à se mouvoir dans le même sens. Si l'on désigne par α l'angle compris entre o et 360 degrés qui a été ainsi décrit, lorsque la droite mobile coïncide avec l'une ou l'autre des deux directions de la tangente, il est clair que cette direction sera complétement déterminée quand l'angle α sera connu. Cela posé, la formule

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx}$$

donne

$$\sin\alpha = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dy}{ds},$$

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds}.$$

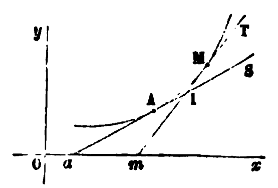
Mais, comme rien ne détermine ici le signe du radical $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ou ds, les formules précédentes se rapporteront à l'une ou à l'autre des deux directions de la tangente, selon qu'on admettra le signe $+$ ou le signe $-$.

Du rayon de courbure et du centre de courbure en un point d'une courbe plane.

192. On nomme *courbure* d'un arc de courbe plane AM, qui n'offre aucun point d'inflexion, l'angle SIT que font entre elles les directions AS, MT des tangentes menées par les extrémités de l'arc. Cet angle est celui qui serait engendré par une droite mobile passant par un point fixe, et dont les directions successives seraient paral-

lèles aux tangentes menées par les différents points de l'arc AM.

Si l'extrémité A de l'arc $AM = s$ est fixe et que l'autre extrémité M varie, la courbure σ deviendra va-



riable, et elle croîtra avec s tant que cet arc n'aura pas d'inflexion. La différentielle $d\sigma$ de la courbure σ de l'arc AM est dite l'*angle de contingence* au point M.

On nomme *courbure moyenne* d'un arc de courbe AM le rapport $\frac{\sigma}{s}$ de la courbure absolue à la longueur de l'arc.

Enfin on nomme *courbure d'une courbe* en un point M la limite vers laquelle tend la courbure moyenne d'un arc infiniment petit ayant l'une de ses extrémités en M. D'après cela, si l'on désigne par s la longueur d'un arc terminé en M et compté à partir d'une origine A arbitraire, par σ la courbure de l'arc AM, la limite vers laquelle tend le rapport

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta s},$$

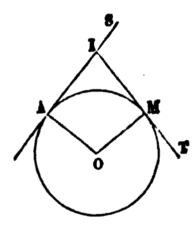
quand Δs tend vers zéro, est ce que nous nommons la courbure de la courbe au point M. Quelle que soit la variable que l'on regarde comme indépendante, la limite dont il s'agit est égale à

$$\frac{d\sigma}{ds},$$

et par conséquent *la courbure d'une courbe en un point*

est le rapport de l'angle de contingence à la différentielle de l'arc.

Dans le cercle, la courbure d'un arc est évidemment égale à l'angle au centre qui correspond à l'arc, et la courbure moyenne ou le rapport de l'angle au centre à



l'arc est égale à l'inverse du rayon. Ce résultat s'applique à un arc quelconque fini ou infiniment petit; donc la courbure aux différents points de la circonférence d'un cercle est constante et égale à l'inverse du rayon.

193. Du rayon de courbure. — On nomme *rayon de courbure* en un point d'une courbe le rayon du cercle dont la courbure est égale à la courbure de la courbe au point donné; ce cercle est dit lui-même *cercle de courbure*. On a, d'après ce qui précède, en désignant par R le rayon de courbure,

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{R}, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{ds}{d\sigma}.$$

Il est aisé d'avoir les expressions de l'angle de contingence et du rayon de courbure en fonction des coordonnées rectangulaires. En effet, si α, α_0 désignent les angles formés par la direction de l'axe des abscisses positives avec les directions des tangentes AS, MT, on aura évidemment

$$\pm\sigma = \alpha - \alpha_0, \quad \text{d'où} \quad \pm d\sigma = d\alpha.$$

Or

$$\tang\alpha = \frac{dy}{dx},$$

et l'on en tire par la différentiation

$$\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2}$$

ou

$$(1) \qquad \pm d\sigma = d\alpha = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2 + dy^2};$$

d'ailleurs

$$\pm ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

donc on a

$$(2) \qquad \mathrm{R} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Nous nous dispensons d'écrire le signe $\pm$ devant le second membre de cette formule, parce que le signe de l'expression $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}$ est lui-même indéterminé. Ce signe doit être choisi de manière à rendre positive la valeur du rayon R.

Dans les formules (1) et (2), la variable indépendante n'est pas désignée; si l'on prend x pour cette variable, on aura

$$(3) \qquad \pm d\sigma = d\alpha = \frac{\frac{d^2y}{d^2x}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,dx$$

et

$$(4) \qquad \mathrm{R} = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

194. Il est aisé de démontrer que le cercle est la seule

courbe dont le rayon de courbure soit constant. En effet, pour une telle courbe on a

$$ds = a\,d\alpha,$$

a étant une constante; par conséquent les équations

$$dx = ds\cos\alpha, \quad dy = ds\sin\alpha$$

donnent

$$dx = a\cos\alpha\,d\alpha, \quad dy = a\sin\alpha\,d\alpha$$

ou

$$dx = -d(a\sin\alpha), \quad dy = d(a\cos\alpha);$$

donc si l'on désigne par x_0 et y_0 deux constantes, on aura (n° 15, coroll. II)

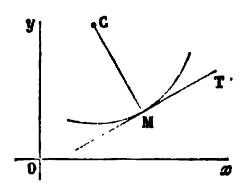
$$x - x_0 = -a\sin\alpha, \quad y - y_0 = a\cos\alpha,$$

d'où

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2,$$

ce qui est l'équation d'un cercle.

195. Du centre de courbure. — Une courbe étant donnée, menons la tangente MT au point M, et construisons le cercle de courbure de manière qu'il passe par le point M, qu'il soit tangent à la ligne MT et qu'il soit,



par rapport à cette tangente, du même côté que les points de la courbe infiniment voisins de M. Le centre C du cercle se trouvera alors sur la normale au point M; il est dit le *centre de courbure* relatif à ce point.

Théorème. — *Le centre de courbure d'une courbe en un point donné est la limite du point d'intersection de*

la normale menée par ce point, avec la normale infiniment voisine.

Soient x, y les coordonnées d'un point M de la courbe donnée, relatives à deux axes rectangulaires; l'équation de la normale en M sera

$$(1) \qquad (X - x) + (Y - y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Représentons-la, pour abréger, par $V = 0$. Pour avoir l'équation de la normale menée par un autre point M' $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$, il suffira de remplacer dans l'équation précédente $x,\ y,\ \frac{dy}{dx}$ par $x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ \frac{dy}{dx} + \Delta\frac{dy}{dx}$; nous représenterons l'équation ainsi obtenue par $V + \Delta V = 0$. Le point d'intersection des deux normales sera donné par les deux équations

$$V = 0, \quad V + \Delta V = 0,$$

ou

$$V = 0, \quad \Delta V = 0,$$

ou enfin

$$V = 0, \quad \frac{\Delta V}{\Delta x} = 0.$$

Supposons maintenant que le point M' se rapproche indéfiniment du point M; le point d'intersection des deux normales tendra vers une limite C dont les coordonnées seront déterminées par les deux équations

$$V = 0, \quad \frac{dV}{dx} = 0.$$

La première n'est autre chose que l'équation (1), et la seconde se déduit de celle-ci, par la différentiation, en regardant X et Y comme des constantes. Cette différen-

tiation donne

$$(2) \qquad -\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)+(Y-y)\frac{d^2y}{dx^2}=0;$$

si donc on désigne par x_1, y_1 les coordonnées du point C, on aura, par les équations (1) et (2),

$$(3) \qquad x_1-x=-\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad y_1-y=\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

En ajoutant les équations (3), après les avoir élevées au carré, on obtient

$$(4) \qquad (y_1-y)^2+(x_1-x)^2=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=R^2,$$

d'où il suit que la longueur MC est égale au rayon de courbure R. En outre, la première des formules (3) montre que y_1-y est de même signe que $\frac{d^2y}{dx^2}$; or si l'on désigne par Y l'ordonnée de la tangente MT, qui répond à l'abscisse $x+\Delta x$, la différence $y+\Delta y-Y$ aura le signe de $\frac{d^2y}{dx^2}$ (n° 166); d'ailleurs y_1-Y a évidemment le signe de y_1-y; donc y_1-Y et $y+\Delta y-Y$ sont aussi de même signe. Il résulte de là que le point C est du même côté de la tangente que les points de la courbe infiniment voisins de M : donc ce point est bien le centre de courbure.

196. Nous nommerons *direction de la normale* en un point M d'une courbe celle du rayon de courbure en ce point. Cette direction est celle que suivrait un point mobile partant de M pour se diriger vers C; elle

sera déterminée si l'on donne l'angle ξ qu'elle forme avec la direction de la partie positive de l'axe des x. L'angle ξ peut varier de zéro à 360 degrés, et nous supposerons qu'il soit engendré de la même manière que l'angle α (n° 191), c'est-à-dire par une droite mobile d'abord parallèle à l'axe des x positives, et qui se mouvrait toujours dans le même sens en s'élevant d'abord vers la partie positive de l'axe des y. Quant à l'angle α qui figure dans les formules du n° 191, il n'est déterminé que quand on a fixé le signe de ds. Profitant de l'indétermination de ce signe, nous choisirons α de manière que l'on ait

$$\xi = \frac{\pi}{2} + \alpha;$$

l'angle α répond alors à une direction déterminée de la tangente, et les formules

$$dx = ds\cos\alpha, \quad dy = ds\sin\alpha$$

exigent que l'origine de l'arc s soit convenablement choisie.

Les cosinus des angles que fait la direction du rayon $MC = R$ avec les directions positives des axes étant ainsi égaux à $-\sin\alpha$ et $+\cos\alpha$, les formules (3) du n° 195 deviennent

$$x_1 - x = -R\sin\alpha, \quad y_1 - y = R\cos\alpha.$$

Enfin la différentielle $d\alpha$ a pour valeur (n° 193)

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}dx,$$

d'où il suit que le second membre de la deuxième formule (3) du n° 195 est aussi égal à $\frac{dx}{d\alpha}$ ou à $\frac{ds}{d\alpha}\cos\alpha$; on

a donc

$$R = \frac{ds}{d\alpha} \quad \text{ou} \quad ds = R\,d\alpha;$$

par conséquent il résulte de nos hypothèses que ds et $d\alpha$ sont de même signe, et que $d\alpha$ est égale à l'angle de contingence $d\sigma$.

Des développées et des développantes des courbes planes.

197. Le lieu géométrique des centres de courbure aux divers points d'une courbe donnée est une seconde courbe qui est dite la *développée* de la première. Celle-ci est une *développante* relativement au lieu des centres de courbure.

Les équations (3) du n° 195 déterminent le centre de courbure, dans l'hypothèse des coordonnées rectangulaires; l'abscisse x y est prise pour variable indépendante, mais celle-ci cessera d'être désignée si l'on écrit $\dfrac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$ au lieu de $\frac{dy}{dx}$. Il vient ainsi

$$x_1 - x = -\frac{(dx^2 + dy^2)dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

$$y_1 - y = +\frac{(dx^2 + dy^2)dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Les coordonnées x et y étant des fonctions données d'une même variable indépendante, on aura l'équation de la développée en éliminant cette variable indépendante entre les équations précédentes.

198. Pour étudier les propriétés de la développée, nous emploierons les expressions des coordonnées du

centre de courbure obtenues au n° 196, savoir :

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = x - R\sin\alpha, \\ y_1 = y + R\cos\alpha; \end{cases}$$

R et α désignent le rayon de courbure et l'angle qui fixe la direction de la tangente. Les quantités qui figurent dans les équations (1) sont fonctions de la même variable indépendante, et la différentiation donne

$$dx_1 = dx - R\cos\alpha\,d\alpha - dR\sin\alpha,$$
$$dy_1 = dy - R\sin\alpha\,d\alpha + dR\cos\alpha.$$

Mais les parties

$$dx - R\cos\alpha\,d\alpha,\quad dy - R\sin\alpha\,d\alpha$$

sont nulles en vertu des formules

$$dx = ds\cos\alpha,\quad dy = ds\sin\alpha,\quad ds = R\,d\alpha;$$

on a donc simplement

$$(2)\qquad \begin{cases} dx_1 = -\,dR\sin\alpha, \\ dy_1 = +\,dR\cos\alpha, \end{cases}$$

et l'on déduit de ces équations

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\cot\alpha$$

ou

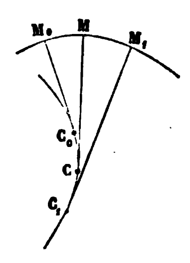
$$(3)\qquad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x},$$

puis

$$(4)\qquad dx_1^2 + dy_1^2 = dR^2.$$

L'équation (3) exprime que *les normales de la courbe donnée sont les tangentes de la développée,* et l'équation (4) montre que *la différentielle du rayon de cour-*

bure de la courbe donnée est égale à la différentielle ds_1 de l'arc s_1 de la développée, terminé au centre de courbure et compté à partir d'une origine arbitraire.



Supposons que l'on compte l'arc $C_0C = s_1$ de la développée à partir d'un point C_0 centre de courbure relatif au point M_0 de la courbe donnée, et désignons par R_0 le rayon de courbure au point M_0. La formule (4) donnera

$$ds_1 = dR \quad \text{ou} \quad ds_1 = d(R - R_0);$$

les variables s_1 et $R - R_0$ ayant même différentielle et s'annulant simultanément, on a

$$s_1 = R - R_0.$$

Cette formule exprime la propriété suivante :

Un arc quelconque de la développée d'une courbe plane est égal à la différence des rayons de courbure qui aboutissent aux extrémités de l'arc de la développée.

199. C'est en raison de cette propriété que la courbe lieu des centres de courbure a reçu le nom de *développée*.

Soient M_0M_1 un arc quelconque de la courbe donnée, et C_0C_1 l'arc correspondant de la développée. Si l'on fixe en C_1 l'une des extrémités d'un fil de longueur

$M_1 C_1 = R_1$, puis que l'on enroule ce fil sur l'arc $C_1 C_0$ et qu'on le tende à partir de C_0 dans la direction $C_0 M_0$, la seconde extrémité du fil tombera en M_0 à cause de l'égalité $C_0 C_1 = R_1 - R_0$. Cela posé, si l'on déroule le fil en le tenant toujours tendu, il est évident que son extrémité décrira l'arc $M_0 M_1$; car soit $C_1 CM$ l'une des positions du fil, on a

$$CM = C_0 M_0 + C_0 C = R_0 + s_1;$$

donc CM est le rayon de courbure qui aboutit au point C, et en conséquence le point M est sur l'arc $M_0 M_1$.

La développée d'une courbe algébrique est elle-même une courbe algébrique, et d'après ce qui précède tout arc de cette développée peut être exprimé par une fonction algébrique des coordonnées; on dit alors que cette développée est *rectifiable.*

200. Pour revenir de la développée à la développante, on emploiera les deux équations

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \frac{dy}{dx} + 1 = 0, \quad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{dy_1}{dx_1}.$$

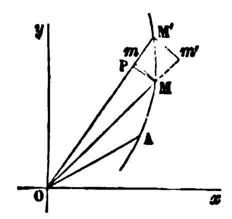
Ici x_1 et y_1 sont des fonctions données d'une variable indépendante; en éliminant cette variable entre les équations précédentes, on obtiendra une équation entre x, y, $\frac{dy}{dx}$, qui sera l'équation différentielle de la développante demandée. Il est facile de voir que cette équation différentielle appartient à toutes les *trajectoires orthogonales* des tangentes de la courbe donnée, c'est-à-dire à toutes les courbes qui ont ces tangentes pour normales; il en résulte qu'une courbe donnée a une infinité de développantes. Nous reviendrons plus loin sur cette question.

Formules relatives au système des coordonnées polaires.

201. Différentielle de l'aire d'un secteur. — Soit une courbe AM dont chaque point M est déterminé par le rayon vecteur $OM = \rho$ issu du point fixe O, et par l'angle ω que fait la direction de ce rayon avec une direction fixe Ox. Si le point A est fixe et que le point M soit variable, l'aire du secteur AOM, comprise entre la courbe et les rayons OA, OM, sera une fonction dont nous nous proposons de trouver la différentielle. Si l'on donne à ω l'accroissement $M'OM = \Delta\omega$, le rayon vecteur croîtra de $\Delta\rho$, et l'aire $AOM = u$ du secteur prendra l'accroissement

$$\Delta u = MOM'.$$

Décrivons du point O comme centre, avec les rayons OM, OM', les deux arcs de cercle Mm, $M'm'$, terminés aux



côtés de l'angle MOM'. On peut choisir $\Delta\omega$ assez petit pour que le rayon vecteur de la courbe varie toujours dans le même sens quand on passe de M à M'; il s'ensuit que l'aire Δu sera comprise entre les aires des secteurs circulaires OMm, $OM'm'$, lesquels ont pour valeurs

$$\frac{1}{2}\rho^2\Delta\omega,\quad \frac{1}{2}(\rho+\Delta\rho)^2\Delta\omega.$$

La limite du rapport de ces infiniment petits est l'u-

nité; on peut donc substituer l'un d'eux à Δu, tant qu'il ne s'âgit que d'obtenir la limite du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta\omega}$. On a ainsi

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta\omega} = \lim \frac{\frac{1}{2}\rho^2 \Delta\omega}{\Delta\omega} = \frac{1}{2}\rho^2,$$

ou

$$\frac{du}{d\omega} = \frac{1}{2}\rho^2 \quad \text{et} \quad du = \frac{1}{2}\rho^2 d\omega.$$

Menons par l'origine des rayons vecteurs la droite Oy perpendiculaire à Ox, et désignons par x, y les coordonnées rectangulaires relatives à Ox et Oy. On aura

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{y}{x}, \quad \rho\cos\omega = x;$$

la première équation donne par la différentiation

$$\frac{d\omega}{\cos^2\omega} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}, \quad \text{d'où} \quad \rho^2 d\omega = x\,dy - y\,dx.$$

Ainsi la différentielle de l'aire du secteur u peut encore s'exprimer par la formule

$$du = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

202. Expression de la différentielle d'un arc de courbe. — Désignons par s l'arc AM dont l'origine A est fixe, tandis que l'extrémité M est variable (*voir* la figure du n° 201); soit aussi Δs l'accroissement MM′ qui répond à l'accroissement $\Delta\omega$ de ω. Abaissons du point M la perpendiculaire MP sur OM′ et tirons la corde MM′; le triangle rectangle MPM′ donnera

$$\overline{\text{MM}'}^2 = \overline{\text{MP}}^2 + \overline{\text{M}'\text{P}}^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\text{MM}'}{\Delta\omega}\right)^2 = \left(\frac{\text{MP}}{\Delta\omega}\right)^2 + \left(\frac{\text{M}'\text{P}}{\Delta\omega}\right)^2.$$

Les limites des rapports qui figurent dans cette formule ne seront pas changées si l'on remplace

$$\text{MM}', \quad \text{MP}, \quad \text{M}'\text{P}$$

par

$$\Delta s, \quad \rho\Delta\omega, \quad \Delta\rho$$

respectivement. En effet, la limite du rapport de Δs à sa corde MM′ est l'unité; pour la même raison, la limite du rapport de $\rho\Delta\omega$ à MP est l'unité, car $\rho\Delta\omega = \mathrm{M}m$ est la moitié d'un arc de cercle infiniment petit et MP est la moitié de la corde du même arc; enfin la limite du rapport de $\Delta\rho$ à M′P est l'unité, car la différence Pm de ces infiniment petits est égale à

$$\rho - \rho\cos\Delta\omega = 2\rho\sin^2\frac{1}{2}\Delta\omega,$$

et son rapport à $\Delta\omega$ tend vers la limite zéro. On a, d'après cela,

$$\lim\left(\frac{\Delta s}{\Delta\omega}\right)^2 = \lim\left(\frac{\rho\,\Delta\omega}{\Delta\omega}\right)^2 + \lim\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta\omega}\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{ds^2}{d\omega^2} = \rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2},$$

ou

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2.$$

On peut déduire cette formule de celle qui se rapporte aux coordonnées rectangulaires; mais nous avons fait ce calcul au n° 73 et nous n'y reviendrons pas ici.

203. Détermination de la tangente. — Dans le système des coordonnées polaires, on détermine la tangente au moyen de l'angle μ qu'elle forme avec le rayon vecteur.

L'angle μ relatif au point M de la courbe est la limite vers laquelle tend l'angle PM′M quand le point M′ se

rapproche indéfiniment de M (*voir* la figure du n° 201). Or le triangle rectangle MM'P donne

$$\cos PM'M = \frac{M'P}{MM'}, \quad \sin PM'M = \frac{MP}{MM'},$$

et les limites des seconds membres de ces formules ne seront pas changées si l'on remplace, comme au numéro précédent,

$$MM', \quad MP, \quad M'P$$

par

$$\Delta s, \quad \rho\Delta\omega, \quad \Delta\rho$$

respectivement. On a donc

$$\cos\mu = \lim\frac{\Delta\rho}{\Delta s}, \quad \sin\mu = \lim\frac{\rho\Delta\omega}{\Delta s},$$

c'est-à-dire

$$\cos\mu = \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}},$$

$$\sin\mu = \frac{\rho\, d\omega}{ds} = \frac{\rho\, d\omega}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}};$$

on déduit de ces formules

$$\tan g\,\mu = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho}.$$

204. On peut déterminer les points d'une courbe par deux rayons vecteurs ρ, ρ' issus de deux origines données. En appelant μ, μ' les angles formés par la tangente avec ces rayons vecteurs, on a, par ce qui précède,

$$\cos\mu = \frac{d\rho}{ds}, \quad \cos\mu' = \frac{d\rho'}{ds},$$

d'où

$$\frac{\cos\mu'}{\cos\mu} = \frac{d\rho'}{d\rho}.$$

Par exemple, dans ce système de coordonnées, l'équa-

tion de l'ellipse ou de l'hyperbole est

$$\rho' = \pm \rho + \text{const.};$$

on en conclut

$$\frac{d\rho'}{d\rho} = \pm 1,$$

et notre formule donne

$$\cos\mu' = \pm \cos\mu,$$

ce qui exprime la propriété connue de la tangente aux sections coniques.

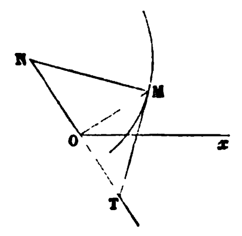
Au lieu de deux rayons vecteurs issus de deux origines fixes, on peut employer comme coordonnées les angles ω, ω' que ces rayons forment avec une direction fixe. On aura alors les formules

$$\sin\mu = \frac{\rho\, d\omega}{ds}, \quad \sin\mu' = \frac{\rho'\, d\omega'}{ds},$$

et, à cause de $\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega'}$,

$$\frac{\sin\mu'}{\sin\mu} = \frac{\sin\omega\, d\omega'}{\sin\omega'\, d\omega}.$$

205. Sous-tangente et sous-normale. — Menons par l'origine des coordonnées polaires une perpendicu-



laire au rayon vecteur; les parties de cette perpendiculaire comprises entre l'origine et les points où elle rencontre

la tangente et la normale sont dites *sous-tangente* et *sous-normale*.

Soient NT la perpendiculaire menée par l'origine O au rayon vecteur OM de la courbe donnée, MT la tangente en M, et MN la normale. La sous-tangente sera OT $=$ T′, la sous-normale ON $=$ N′, et l'on aura

$$\mathrm{T}' = \rho \operatorname{tang}\mu, \quad \mathrm{N}' = \rho \cot\mu$$

ou

$$\mathrm{T}' = \frac{\rho^2 d\omega}{d\rho}, \quad \mathrm{N}' = \frac{d\rho}{d\omega}.$$

Les longueurs T et N de la tangente et de la normale sont

$$\mathrm{T} = \sqrt{\rho^2 + \mathrm{T}'^2} = \frac{\rho\, ds}{d\rho}, \quad \mathrm{N} = \sqrt{\rho^2 + \mathrm{N}'^2} = \frac{ds}{d\omega}.$$

206. Angle de contingence et rayon de courbure. — L'angle de contingence $d\sigma$ est égal, comme on l'a vu, à la différentielle de l'angle formé par la tangente avec l'axe Ox; d'ailleurs ce dernier angle est évidemment égal à $\omega + \mu$; donc on a

$$d\sigma = d\omega + d\mu.$$

La formule

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\rho}{\dfrac{d\rho}{d\omega}}$$

donne par la différentiation, en prenant ω pour variable indépendante,

$$\frac{d\mu}{\cos^2\mu} = \frac{\dfrac{d\rho^2}{d\omega^2} - \rho\dfrac{d^2\rho}{d\omega^2}}{\dfrac{d\rho^2}{d\omega^2}}\, d\omega, \quad d\mu = \frac{\dfrac{d\rho^2}{d\omega^2} - \rho\dfrac{d^2\rho}{d\omega^2}}{\rho^2 + \dfrac{d\rho^2}{d\omega^2}}\, d\omega;$$

on a donc

$$d\sigma = \frac{\rho^2 + 2\frac{d\rho^2}{d\omega^2} - \rho\frac{d^2\rho}{d\omega^2}}{\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}} d\omega.$$

D'ailleurs

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}}\, d\omega,$$

et l'on en conclut cette valeur de R :

$$\text{(1)} \qquad R = \frac{\left(\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\frac{d\rho^2}{d\omega^2} - \rho\frac{d^2\rho}{d\omega^2}}.$$

On peut déduire cette formule de celle qui se rapporte aux coordonnées rectangulaires; nous avons présenté ce calcul, comme exemple, au n° 73 en nous occupant de la question du changement de variables.

Il est quelquefois avantageux d'introduire dans la formule (1) les dérivées de $\frac{1}{\rho}$ au lieu de celles de ρ. On a

$$\rho = \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho}\right)}, \quad d\rho = -\frac{d\frac{1}{\rho}}{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2}, \quad d^2\rho = -\frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2} + \frac{2\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2}{\left(\frac{1}{\rho}\right)^3},$$

et la substitution de ces valeurs dans la formule (1) donne

$$\text{(2)} \qquad R = \frac{\left[\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{\rho^3}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\omega^2}\right)}.$$

Des courbes enveloppes.

207. Désignons par $f(x, y, \alpha)$ une fonction des trois variables x, y, α dont la valeur soit bien déterminée quand on a fixé les valeurs de x, y, α. Si l'on suppose que x et y représentent des coordonnées d'une nature quelconque et que α soit un paramètre variable, l'équation

$$f(x, y, \alpha) = 0 \tag{1}$$

représentera une famille de courbes; à chaque valeur de α répondra une courbe individuelle.

Si, après avoir donné à α une valeur déterminée, on attribue à ce paramètre la nouvelle valeur $\alpha + \Delta\alpha$, on aura une seconde courbe qui aura pour équation

$$f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0, \tag{2}$$

et qui coupera la première en certains points m, m', ... Les coordonnées de ces points devront satisfaire aux équations des deux courbes, et par suite à l'équation

$$\frac{f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0. \tag{3}$$

Maintenant, si l'on fait tendre $\Delta\alpha$ vers zéro, les points m, m', ... tendront vers certaines limites M, M', ... et il est évident que les coordonnées des points M, M', ... satisferont à l'équation (1) et à l'équation

$$\frac{\partial f(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0, \tag{4}$$

à laquelle se réduit l'équation (3) quand $\Delta\alpha$ s'évanouit.

Il y aura donc sur chacune des courbes représentées par l'équation (1) un certain nombre de points M, M', ...

déterminés comme nous venons de le dire. Le lieu géométrique de tous ces points est une ligne dont l'équation s'obtiendra par l'élimination de α entre les équations (1) et (4); cette ligne est dite l'*enveloppe* des courbes que représente l'équation (1), et celles-ci, à leur tour, ont reçu le nom d'*enveloppées*.

208. Il faut remarquer que l'enveloppe pourrait n'être plus donnée par cette règle, si le premier membre de l'équation (1) cessait d'être une fonction bien déterminée. Effectivement, un point commun à deux courbes infiniment voisines satisfera bien encore aux équations

$$f(x\, y, \alpha) = 0, \quad f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0;$$

mais, la fonction f étant susceptible de plusieurs valeurs, on n'est plus en droit de dire que $f(x, y, \alpha + \Delta\alpha)$ ait pour limite $f(x, y, \alpha)$ quand $\Delta\alpha$ tend vers zéro.

J'éclaircirai cela par un exemple. Supposons qu'on demande l'enveloppe des circonférences représentées, dans le système des coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$(x - \alpha)^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

a étant une constante. Le premier membre de cette équation étant une fonction bien déterminée, notre règle est applicable; la différentiation relative à α donne

$$x - \alpha = 0,$$

et, par l'élimination de α, on obtient l'équation de l'enveloppe

$$y^2 - a^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (y - a)(y + a) = 0;$$

enveloppe qui se compose de deux droites parallèles à l'axe des x.

L'équation des enveloppées que nous considérons

étant du deuxième degré par rapport à α, on peut lui donner la forme

$$\alpha - x + \sqrt{a^2 - y^2} = 0,$$

et, si l'on voulait appliquer la règle du n° 207 à cette équation, on serait conduit à l'égalité absurde $1 = 0$. Or, ainsi que je l'ai dit plus haut, la règle en question n'est pas ici applicable; si l'on considère deux courbes infiniment voisines et que l'on prenne pour l'une d'elles

$$\alpha = x \pm \sqrt{a^2 - y^2},$$

il faudra prendre pour l'autre

$$\alpha + \Delta\alpha = x \mp \sqrt{a^2 - y^2},$$

sans quoi il n'y aurait pas de rencontre.

209. Les enveloppes ont une propriété commune qui est exprimée par la proposition suivante :

THÉORÈME. — *L'enveloppe d'un système de lignes est tangente aux enveloppées, en chacun des points où elle les rencontre.*

En effet, soit

$$(1) \qquad f(x, y, \alpha) = 0$$

l'équation des enveloppées, x et y désignant des coordonnées rectilignes. Nous supposons que la fonction f soit bien déterminée, et alors on a, pour l'enveloppe, les deux équations

$$(2) \qquad f(x, y, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Pour avoir le coefficient d'inclinaison $\frac{dy}{dx}$ de la tangente en un point d'une enveloppée déterminée, il faut diffé-

rentier l'équation (1), ce qui donne

$$(3)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

Supposons maintenant qu'on veuille connaître le coefficient d'inclinaison de la tangente en un point donné de l'enveloppe. On peut encore prendre l'équation (1) pour celle de l'enveloppe, pourvu qu'on regarde α non plus comme une constante, mais comme une fonction de x et de y déterminée par la seconde équation (2); il faut donc différentier l'équation (1) dans cette hypothèse, pour obtenir la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui convient à l'enveloppe. La différentiation donne

$$(4)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial \alpha}d\alpha = 0,$$

mais la seconde équation (2), qui a lieu pour l'enveloppe, réduit l'équation (4) à l'équation (3). Ainsi l'on aura, pour l'enveloppe et pour les enveloppées,

$$(5)\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Quand il s'agit d'un point d'une enveloppée, α a, dans la formule (5), la valeur qui convient à cette enveloppée; mais, quand il s'agit d'un point de l'enveloppe, α a la valeur tirée de l'équation $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$. Maintenant, si l'on considère un point M commun à une enveloppée et à l'enveloppe, la valeur de α qui répond à l'enveloppée sera égale à celle qu'on tirerait de l'équation $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, puisque celle-ci a lieu pour le point M. La valeur de $\frac{dy}{dx}$ est donc la

même pour l'une et l'autre courbe, et par conséquent celles-ci sont tangentes au point M.

Remarque. — Nous avons déjà rencontré un exemple de la propriété que nous venons d'établir. La développée d'une courbe n'est autre chose, en effet, que l'enveloppe des normales de cette courbe et nous avons reconnu qu'elle a ces normales pour tangentes.

210. Nous présenterons ici une application importante de la théorie des enveloppes.

Si l'on considère une courbe quelconque rapportée à deux axes rectangulaires et que l'on désigne par α l'angle que la direction de l'axe des abscisses fait avec la direction de la tangente, l'équation de cette tangente sera

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = f(\alpha), \tag{1}$$

$f(\alpha)$ étant une fonction de α qui dépend de la nature de la courbe. Mais celle-ci étant l'enveloppe de ses tangentes, son équation s'obtiendra en éliminant α entre la précédente équation et celle qu'on en déduit par la différentiation relative à α, savoir :

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = f'(\alpha). \tag{2}$$

On peut prendre α pour variable indépendante, et les équations (1) et (2) feront connaître les coordonnées x et y de la courbe en fonction de α. On trouve ainsi

$$\left\{\begin{aligned} x &= f'(\alpha)\cos\alpha + f(\alpha)\sin\alpha, \\ y &= f'(\alpha)\sin\alpha - f(\alpha)\cos\alpha. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

La différentiation de ces équations (3) donne ensuite

$$\left\{\begin{aligned} dx &= [f''(\alpha) + f(\alpha)]\cos\alpha\, d\alpha, \\ dy &= [f''(\alpha) + f(\alpha)]\sin\alpha\, d\alpha; \end{aligned}\right. \tag{4}$$

ajoutant les équations (4) après les avoir élevées au carré

et extrayant ensuite la racine carrée de l'équation résultante, on aura

$$(5)\qquad ds = [f''(\alpha) + f(\alpha)]d\alpha,$$

ce qui, au surplus, résulte des formules du n° **191**. Comme $d\alpha$ est évidemment égal à l'angle de contingence, on a cette expression du rayon de courbure :

$$(6)\qquad \mathrm{R} = f''(\alpha) + f(\alpha).$$

Les formules qui précèdent sont susceptibles d'applications diverses; nous en présenterons un exemple.

Lorsqu'on donne à α une valeur déterminée, l'équation (2) représente une droite perpendiculaire à la droite (1) au point que déterminent les équations (3) et qui appartient à la courbe proposée; il en résulte que l'équation (2) représente les normales de la courbe. Si nous prenons la dérivée de cette équation (2) par rapport à α, savoir :

$$(7)\qquad -x\sin\alpha + y\cos\alpha = f''(\alpha),$$

le système des équations (2) et (7) appartiendra à l'enveloppe des droites (2), enveloppe qui est la développée de la courbe proposée. Désignons par x_1, y_1 les valeurs de x et de y tirées des équations (2) et (7), on aura

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1 = f'(\alpha)\cos\alpha - f''(\alpha)\sin\alpha, \\ y_1 = f'(\alpha)\sin\alpha + f''(\alpha)\cos\alpha; \end{cases}$$

ces formules font connaître les coordonnées du centre de courbure. En les différentiant, on trouve

$$(9)\qquad \begin{cases} dx_1 = -[f'(\alpha) + f'''(\alpha)]\sin\alpha\, d\alpha, \\ dy_1 = +[f'(\alpha) + f'''(\alpha)]\cos\alpha\, d\alpha, \end{cases}$$

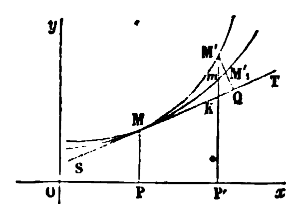
d'où, en appelant s_1 l'arc de la développée,

$$(10)\qquad ds_1 = [f'(\alpha) + f'''(\alpha)]d\alpha = d\mathrm{R}.$$

On retrouve ainsi les résultats obtenus au n° **198**.

Contacts des divers ordres des courbes planes.

211. Soit ST la tangente au point M d'une courbe MM' et considérons une seconde courbe MM'_1 passant par le point M. Prenons sur la première courbe le point M' infiniment voisin de M et abaissons sur la tangente ST la perpendiculaire M'Q qui rencontrera la seconde



courbe au point M'_1; la ligne MQ étant prise pour infiniment petit principal, M'Q sera généralement, comme on l'a vu au n° 166, un infiniment petit du deuxième ordre. Si la courbe MM'_1 n'est pas tangente à la droite ST au point M, la ligne M'_1Q sera un infiniment petit du premier ordre; mais, dans le cas contraire, elle sera au moins du deuxième ordre.

Lorsque les deux courbes MM', MM'_1 ont au point M la même tangente ST, on dit qu'il y a entre elles *contact* au point M, et comme, dans ce cas, M'Q et M'_1Q sont des infiniment petits du deuxième ordre au moins, la même chose aura lieu à l'égard de $M'M'_1$ qui est la différence ou la somme de ces lignes. Généralement, si $\mu+1$ désigne l'ordre infinitésimal de $M'M'_1$ relativement à l'infiniment petit principal MQ, nous dirons que les deux courbes ont, au point M, *un contact de l'ordre* μ.

Cela posé, traçons deux axes de coordonnées Ox, Oy, faisant entre eux un angle quelconque θ et dont le second

ne soit pas parallèle à la tangente ST; menons l'ordonnée MP du point M, ainsi que l'ordonnée M'P' qui coupe en m la courbe MM'_1 et en K la tangente ST; joignons enfin par une droite les points m et M'_1. Les angles m et M'_1 du triangle infiniment petit $mM'M'_1$ tendent vers des limites finies; l'angle en m a pour limite l'angle SMP que nous supposons différent de zéro, et il est évident que l'angle M'_1 a pour limite un angle droit; le rapport des côtés $M'M'_1$, $M'm$ étant égal au rapport des sinus des angles opposés, il s'ensuit que ce rapport

$$\frac{M'M'_1}{M'm}$$

tend vers une limite finie. Enfin, si l'on désigne par α l'inclinaison de la tangente ST sur l'axe Ox, on trouve, en reproduisant le calcul fait au n° 166,

$$PP' = MQ\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} - M'Q\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta},$$

et, comme le rapport $\frac{M'Q}{MQ}$ est infiniment petit, on voit que le rapport

$$\frac{MQ}{PP'}$$

tend vers une limite finie.

Il résulte de là que l'ordre infinitésimal de $M'M'_1$ relativement à MQ est le même que l'ordre infinitésimal de $M'm$ relativement à PP', et, si nous représentons par μ l'ordre du contact des deux courbes, $M'm$ sera un infiniment petit d'ordre $\mu+1$ relativement à PP' pris actuellement pour infiniment petit principal. Désignons par x l'abscisse du point M, par $x+\Delta x$ celle des points M', m et par Y, Y' les ordonnées de ces mêmes

points, nous aurons

$$M'm = Y - Y', \quad PP' = \Delta x,$$

en sorte que $\mu + 1$ sera l'ordre infinitésimal de la différence $Y - Y'$ relativement à Δx.

Soient y et y' les valeurs auxquelles se réduisent Y et Y' quand Δx s'annule; on aura, par la formule de Taylor, et en supposant remplies les conditions exigées par cette formule,

$$Y = y + \frac{dy}{dx}\frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}}\frac{\Delta x^{\mu+1}}{1.2\ldots(\mu+1)} + R_{\mu+2},$$

$$Y' = y' + \frac{dy'}{dx}\frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y'}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^{\mu+1}y'}{dx^{\mu+1}}\frac{\Delta x^{\mu+1}}{1.2\ldots(\mu+1)} + R'_{\mu+2},$$

$R_{\mu+2}$, $R'_{\mu+2}$ désignant les restes des deux séries arrêtées aux termes de rang $\mu + 2$. D'après cela, pour que nos deux courbes aient effectivement en M un contact de l'ordre μ, c'est-à-dire pour que la différence $Y - Y'$ soit un infiniment petit d'ordre $\mu + 1$, il faut et il suffit que l'on ait

$$(1) \quad y' = y, \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{\mu}y'}{dx^{\mu}} = \frac{d^{\mu}y}{dx^{\mu}};$$

cela exprime que, pour l'abscisse x du point de contact, les valeurs de l'ordonnée et de ses μ premières dérivées tirées de l'équation de l'une des courbes doivent être égales aux valeurs correspondantes tirées de l'équation de l'autre courbe. Si ces conditions sont remplies et que les dérivées d'ordre $\mu + 1$,

$$\frac{d^{\mu+1}y'}{dx^{\mu+1}}, \quad \frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}},$$

ne soient pas égales entre elles, on aura

$$(2) \quad Y - Y' = \left(\frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}} - \frac{d^{\mu+1}y'}{dx^{\mu+1}}\right)\frac{\Delta x^{\mu+1}}{1.2\ldots(\mu+1)} + (R_{\mu+2} - R'_{\mu+2}),$$

la différence $Y - Y'$ sera d'un ordre infinitésimal égal à $\mu + 1$, et le nombre μ exprimera, en conséquence, l'ordre du contact des deux courbes.

212. Si l'ordre μ du contact est un nombre impair, $Y - Y'$ ne change pas de signe, d'après la formule (2), quand Δx change de signe, puisque $R_{\mu+2} - R'_{\mu+2}$ est un infiniment petit d'ordre $\mu + 2$; ce signe est celui de la différence

$$\frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}} - \frac{d^{\mu+1}y'}{dy^{\mu+1}}.$$

Il s'ensuit que l'une des courbes est tout entière située d'un même côté, par rapport à l'autre, dans le voisinage du point de contact.

Au contraire, quand l'ordre μ du contact est un nombre pair, la différence $Y - Y'$ change de signe avec Δx, et les courbes se traversent mutuellement au point de contact.

Remarquons enfin que, si les deux courbes ont au point M un contact d'ordre μ, il est impossible de faire passer par le point M une troisième courbe qui soit comprise entre les deux premières, à moins qu'elle n'ait avec celles-ci, au point M, un contact de l'ordre μ au moins. En effet, soit Y'' l'ordonnée relative à l'abscisse $x + \Delta x$ d'une troisième courbe passant par le point M. On aura

$$Y'' - Y' = (Y'' - Y) + (Y - Y');$$

si donc $Y'' - Y$ est d'un ordre infinitésimal inférieur à $\mu + 1$, $Y'' - Y'$ sera aussi de cet ordre, et par conséquent

$$Y'' - Y' \quad \text{et} \quad Y'' - Y$$

seront de même signe, d'après la formule précédente.

Des courbes osculatrices.

213. Soit C une courbe donnée, dont nous représenterons les coordonnées par x, y. Soit aussi C' une courbe d'une espèce donnée et dans l'équation de laquelle figurent $n+1$ constantes arbitraires; nous représenterons par y' l'ordonnée de la courbe C' qui répond à l'abscisse x.

Si l'on désigne par μ un entier qui ne soit pas supérieur à n, on pourra disposer des arbitraires de manière que la courbe C' passe par un point M de la courbe C répondant à une abscisse donnée x, et qu'elle ait en ce point, avec la courbe C, un contact de l'ordre μ. Pour obtenir les conditions de ce contact, il suffira, d'après ce qu'on a vu plus haut, d'égaler les valeurs de y et de ses μ premières dérivées tirées de l'équation de la courbe C, aux valeurs de y' et de ses μ premières dérivées tirées de l'équation de la courbe C'. Les équations de condition ainsi formées seront au nombre de $\mu+1$; si l'on a $n>\mu$, il restera $n-\mu$ constantes indéterminées; mais, si l'on a $n=\mu$, la courbe C' sera complétement déterminée et elle aura au point M, avec la courbe C, un contact qui sera au moins de l'ordre n. Dans ce dernier cas on dit que la courbe C' est *osculatrice* de la courbe C, au point M; elle est, parmi toutes les courbes de la famille à laquelle elle appartient, celle qui a le contact de l'ordre le plus élevé avec la courbe C.

214. Supposons qu'on ait disposé des arbitraires qui figurent dans l'équation de C', de manière que cette courbe C' passe par le point M(x, y) de la courbe C, et qu'elle ait avec celle-ci, au point M, un contact d'un ordre μ inférieur à n; le nombre μ peut ici se réduire

à zéro, et dans ce cas les deux courbes n'ont aucun contact, elles sont sécantes. Les conditions de notre hypothèse sont, en faisant toujours abstraction des cas de discontinuité,

$$(1) \qquad y' = y, \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad \ldots, \quad \frac{d^\mu y'}{dx^\mu} = \frac{d^\mu y}{dx^\mu},$$

et elles se réduisent à la première d'entre elles, dans le cas de $\mu = 0$. Cela posé, comme il reste des arbitraires indéterminées au nombre de $n - \mu$, nous pouvons profiter de cette indétermination pour faire passer la courbe C' par le point de la courbe C qui répond à une abscisse donnée $x + \Delta x$. Désignons par Y et Y' les ordonnées des deux courbes qui correspondent à cette abscisse; on aura, comme au n° 211,

$$Y' - Y = \left(\frac{d^{\mu+1} y'}{dx^{\mu+1}} - \frac{d^{\mu+1} y}{dx^{\mu+1}}\right) \frac{\Delta x^{\mu+1}}{1.2\ldots(\mu+1)} + (R'_{\mu+2} - R_{\mu+2}),$$

$R'_{\mu+2}$ et $R_{\mu+2}$ étant des infiniment petits de l'ordre $\mu + 2$. La condition que nous voulons exprimer, savoir $Y' = Y$, est donc

$$\left(\frac{d^{\mu+1} y'}{dx^{\mu+1}} - \frac{d^{\mu+1} y}{dx^{\mu+1}}\right) + 1.2\ldots(\mu+1) \frac{R'_{\mu+2} - R_{\mu+2}}{\Delta x^{\mu+1}} = 0,$$

et, si l'on fait tendre Δx vers zéro, elle se réduira, à la limite, à

$$(2) \qquad \frac{d^{\mu+1} y'}{dx^{\mu+1}} = \frac{d^{\mu+1} y}{dx^{\mu+1}}.$$

En joignant cette équation (2) aux équations (1), on obtient précisément les conditions pour que le contact des courbes C et C' soit de l'ordre $\mu + 1$.

Il résulte de là que, pour avoir celle des courbes C' qui est osculatrice de la courbe C au point M, il suffira de disposer des $n + 1$ arbitraires contenues dans l'équa-

tion de C′, de manière que cette courbe passe par le point M et par n autres points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de la courbe C répondant aux abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$, puis de faire tendre successivement vers la limite x chacune des autres abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Lorsque x_1 aura atteint la limite x, la courbe C′ aura en M avec C un contact du premier ordre ; lorsque ensuite on fera tendre x_2 vers la même limite x, l'ordre du contact s'élèvera d'une unité, et ainsi de suite.

215. On suppose dans ce qui précède que les points M_1, $M_2, \ldots, M_n$ viennent se confondre les uns après les autres avec le point M. Mais la courbe C′, assujettie à passer par tous ces points, coïncidera encore à la limite avec la courbe osculatrice de la courbe proposée, au point M, lorsque les points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ se rapprocheront indéfiniment du point M en se déplaçant simultanément suivant une loi continue quelconque.

Soient, en effet, $y = f(x)$ et $y' = f_1(x)$ les équations des deux courbes C et C′; $\varphi(x)$ la différence $f_1(x) - f(x)$. Représentons par x, $x + h_1$, $x + h_2$, $\ldots$, $x + h_n$ les abscisses des points M, $M_1, M_2, \ldots, M_n$ pris arbitrairement sur la courbe C′, les valeurs absolues des quantités $h_1, h_2, \ldots, h_n$ étant inférieures à un nombre donné h. Les équations qui expriment que la courbe C′ passe par les points M, $M_1, \ldots, M_n$ sont

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi(x) = 0, \quad \varphi(x + h_1) = 0, \quad \varphi(x + h_2) = 0, \quad \ldots, \\ \qquad \varphi(x + h_n) = 0. \end{cases}$$

On peut remplacer ce système par le suivant :

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(x + h_1) - \varphi(x) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi(x + h_n) - \varphi(x) = 0$$

ou

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi(x) = 0, \quad \varphi'(x + k_1) = 0, \quad \varphi'(x + k_2) = 0, \quad \ldots, \\ \qquad \varphi'(x + k_n) = 0, \end{cases}$$

dans lequel $k_1, k_2, \ldots, k_n$ représentent des quantités dont les valeurs absolues sont inférieures à h.

De même, ce système (2) peut être remplacé par

$$\varphi(x)=0,\quad \varphi'(x+k_1)=0,\quad \varphi'(x+k_2)-\varphi'(x+k_1)=0,\quad \ldots,$$
$$\varphi'(x+k_n)-\varphi'(x+k_1)=0,$$

ou

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi(x)=0,\quad \varphi'(x+k_1)=0,\quad \varphi''(x+l_2)=0,\quad \ldots, \\ \varphi''(x+l_n)=0, \end{cases}$$

les valeurs absolues de $l_2, l_3, \ldots, l_n$ étant encore inférieures à h. En continuant ainsi, on remplace finalement le système (1) par le système

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi(x)=0,\quad \varphi'(x+k_1)=0,\quad \varphi''(x+l_2)=0,\quad \ldots, \\ \varphi^n(x+p_n)=0, \end{cases}$$

dans lequel $k_1, l_2, \ldots, p_n$ représentent des quantités qui dépendent de $h_1, h_2, \ldots, h_n$ et dont les valeurs absolues sont inférieures à h. Si l'on fait tendre h_1, $h_2, \ldots, h_n$ vers zéro, $k_1, l_2, \ldots, p_n$ tendent en même temps vers zéro et le système (4) se réduit à

$$(5)\quad \varphi(x)=0,\quad \varphi'(x)=0,\quad \varphi''(x)=0,\quad \ldots,\quad \varphi^n(x)=0;$$

c'est-à-dire

$$y'=y,\quad \frac{dy'}{dx}=\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y'}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2},\quad \ldots,\quad \frac{d^ny'}{dx^n}=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Ainsi *les courbes auront au point* M *un contact de l'ordre n.*

Il est bon de remarquer que la démonstration précédente subsiste lorsque x désigne une quantité variable qui tend vers une limite ξ. Alors tous les points M, M_1, $M_2, \ldots, M_n$ se déplacent d'une façon arbitraire et tendent vers un même point limite $\mathfrak{M}$.

216. Droite osculatrice. — Conique osculatrice. — L'équation d'une droite ne renferme que deux constantes arbitraires ; on ne peut donc établir entre une courbe donnée et une droite qu'un contact du premier ordre, en un point donné. Il s'ensuit que la droite osculatrice d'une courbe en chaque point n'est autre chose que la tangente de la courbe. On retrouve ce résultat par notre théorie ; car soit

$$y' = ax + b$$

l'équation d'une droite ; on en tire

$$\frac{dy'}{dx} = a,$$

et, comme les conditions du contact, au point dont l'abscisse est x, sont

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx},$$

on aura les valeurs suivantes des constantes a et b :

$$a = \frac{dy}{dx}, \quad b = y - x\frac{dy}{dx}.$$

L'équation de la droite osculatrice est donc

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

ce qui est bien l'équation de la tangente.

L'équation générale des sections coniques renferme cinq constantes arbitraires ; donc la conique osculatrice d'une courbe donnée a un contact du quatrième ordre avec cette courbe. Le contact peut être d'un ordre supérieur en certains points particuliers ; ainsi une courbe du troisième degré a, en général, vingt-sept points en chacun desquels elle a un contact du cinquième ordre

avec la conique osculatrice. Ce théorème remarquable est dû à Steiner; j'en ai donné une démonstration dans mon *Cours d'Algèbre supérieure*, 4[e] édition, t. II. Si l'on ne considère que les sections coniques qui satisfont à certaines relations, le nombre des arbitraires sera inférieur à cinq, et la courbe osculatrice n'aura pas, en général, avec la proposée un contact du quatrième ordre : tel est le cas qui se présente quand on ne considère que des paraboles; tel est aussi celui des circonférences que nous allons examiner.

Du cercle osculateur.

217. L'équation générale du cercle renferme trois constantes indéterminées, savoir les coordonnées x_1, y_1 du centre et le rayon R. On peut donc établir ici un contact du deuxième ordre en un point (x, y) de la courbe donnée, et les conditions de l'osculation sont

$$(1) \qquad y' = y, \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

y' étant l'ordonnée du cercle. L'équation de ce cercle est

$$(x - x_1)^2 + (y' - y_1)^2 = R^2,$$

et, en la différentiant successivement deux fois, il vient

$$(x - x_1) + (y' - y_1)\frac{dy'}{dx} = 0,$$

$$1 + \frac{dy'^2}{dx^2} + (y' - y_1)\frac{d^2y'}{dx^2} = 0.$$

Si l'on remplace dans les trois équations précédentes y', $\frac{dy'}{dx}$, $\frac{d^2y'}{dx^2}$ par les valeurs tirées des équations (1), on ob-

tiendra les trois suivantes :

$$(2)\qquad \begin{cases} (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=R^2, \\ (x-x_1)+(y-y_1)\dfrac{dy}{dx}=0, \\ 1+\dfrac{dy^2}{dx^2}+(y-y_1)\dfrac{d^2y}{dx^2}=0, \end{cases}$$

qui détermineront les coordonnées x_1, y_1 et le rayon R du cercle osculateur au point (x,y) de la courbe donnée.

On voit que les équations (2) sont précisément celles qui déterminent le cercle de courbure, d'où il suit que ce cercle et le cercle osculateur ne sont qu'une seule et même chose.

Le cercle osculateur en un point d'une courbe traverse généralement cette courbe, puisqu'il a avec celle-ci un contact d'ordre pair; cependant le contact peut être du troisième ordre en des points particuliers, et alors le cercle osculateur reste tout entier d'un même côté de la courbe, dans le voisinage du point de contact.

Les considérations générales que nous avons présentées au n° **214** conduisent aux conséquences suivantes :

1° *Le cercle osculateur en un point d'une courbe est la limite vers laquelle tend le cercle tangent en ce point à la courbe, et passant par un second point de celle-ci, lorsque ce second point se rapproche indéfiniment du premier en restant constamment sur la courbe.*

2° *Le cercle osculateur en un point d'une courbe est la limite vers laquelle tend le cercle qui passe par ce point et par deux autres points de la courbe, lorsque ces deux derniers points se rapprochent indéfiniment du premier en restant constamment sur la courbe.*

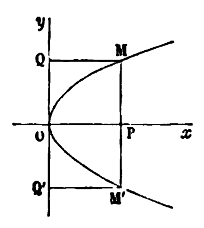
CHAPITRE VIII.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES COURBES PLANES.

Aire des sections coniques.

218. Bien que la quadrature des surfaces terminées par des lignes courbes soit du ressort du Calcul intégral, nous ne pouvons nous dispenser de traiter dès à présent quelques-uns des cas les plus simples et en particulier le cas des sections coniques.

Aire de la parabole. — Supposons qu'on demande



l'aire du segment MOM′ compris entre un arc de parabole et sa corde.

Prenons pour axe des x le diamètre Ox qui passe par le milieu P de la corde MM′ et pour axe des y la tangente Oy à l'extrémité de ce diamètre.

Si l'on désigne par x et y les coordonnées du point M supposé actuellement variable, par θ l'angle des axes, la différentielle de l'aire $\text{OMP} = u$ sera (nᵒ 187)

$$du = y\,dx \sin\theta.$$

Mais l'équation $y^2 = 2px$ de la parabole donne

$$y = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}};$$

on a donc

$$du = \sqrt{2p}\, x^{\frac{1}{2}} dx \sin\theta.$$

Comme $x^{\frac{1}{2}} dx$ est la différentielle de $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$, l'aire u a la même différentielle que la fonction $\frac{2}{3} \sqrt{2p}\, x^{\frac{3}{2}} \sin\theta$ ou $\frac{2}{3} \sqrt{2px} \cdot x \sin\theta$, et elle n'en diffère que par une constante. D'ailleurs les deux fonctions s'évanouissent pour $x = 0$; par conséquent la constante est nulle, et l'on a

$$u = \frac{2}{3} \sqrt{2px} \cdot x \sin\theta \quad \text{ou} \quad u = \frac{2}{3} xy \sin\theta.$$

Cette formule exprime que l'aire OMP est les $\frac{2}{3}$ de l'aire du parallélogramme OPMQ construit sur les coordonnées du point M. L'aire OPM′ est pour la même raison les $\frac{2}{3}$ de l'aire du parallélogramme OPM′Q′; donc enfin l'aire du segment MOM′ est aussi les $\frac{2}{3}$ du parallélogramme MM′Q′Q.

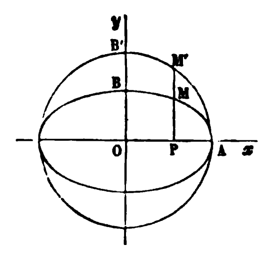
219. Aire de l'ellipse. — Considérons une ellipse rapportée à son centre et à ses axes; désignons par $2a$ et $2b$ les longueurs des axes, et supposons qu'on demande l'aire u comprise entre les deux axes Ox, Oy, l'arc BM et l'ordonnée MP. Décrivons une circonférence ayant le grand axe $2a$ pour diamètre, désignons par u' l'aire comprise entre les axes Ox, Oy, l'arc de cercle B′M′ et l'ordonnée MP prolongée. On aura, en supposant l'abscisse x variable,

$$du = y\, dx, \quad du' = y'\, dx.$$

Mais, y' et y étant les coordonnées du cercle et de l'ellipse, on a $\frac{y'}{a} = \frac{y}{b}$, donc

$$du = \frac{b}{a}\,du';$$

les quantités u et $\frac{b}{a}u'$ ayant mêmes différentielles et s'an-

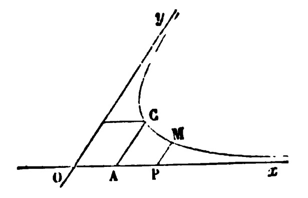


nulant toutes les deux en même temps que x, elles sont nécessairement égales entre elles, et l'on a

$$u = \frac{b}{a}\,u'.$$

La surface entière du cercle étant πa^2, on voit que l'aire totale de l'ellipse est égale à πab.

220. Aire de l'hyperbole. — Considérons l'hyperbole



rapportée à ses deux asymptotes; l'équation de cette courbe sera

$$xy = m^2.$$

Soit u l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et les

ordonnées AC, PM, l'une fixe, l'autre variable; on aura

$$du = y\,dx \sin\theta = m^2 \sin\theta\,\frac{dx}{x};$$

or $\frac{dx}{x}$ est la différentielle du logarithme népérien de x; on a donc

$$u = m^2 \sin\theta \log x + \text{const.}$$

L'aire u devant s'annuler quand x est égale à l'abscisse x_0 du point C, la constante a pour valeur

$$-\,m^2 \sin\theta \log x_0,$$

et l'on a

$$u = m^2 \sin\theta \log \frac{x}{x_0}.$$

Si l'hyperbole est équilatère, on a $\theta = 90°$; prenons alors pour l'ordonnée fixe CA celle du sommet C de l'hyperbole et faisons m égale à l'unité de longueur, on aura simplement

$$u = \log x;$$

par conséquent, *les aires déterminées par les diverses ordonnées de l'hyperbole sont les logarithmes des abscisses correspondantes*. C'est en raison de cette propriété que les logarithmes népériens sont quelquefois désignés sous le nom de *logarithmes hyperboliques*.

De la différentielle d'un arc de section conique.

221. Différentielle de l'arc d'ellipse. — Les coordonnées de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes peuvent s'exprimer en fonction d'un angle variable φ, par les formules

$$x = a \sin\varphi, \quad y = b \cos\varphi,$$

a et b étant les longueurs des demi-axes. On tire de là

$$dx = a\cos\varphi\, d\varphi, \quad dy = -b\sin\varphi\, d\varphi$$

et, par suite,

$$ds = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Si l'on désigne par k l'excentricité, c'est-à-dire le rapport $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, l'expression précédente pourra être mise sous la forme

$$(1) \qquad ds = a\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi;$$

on peut écrire aussi

$$(2) \qquad \frac{ds}{a} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - k^2\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

On a souvent besoin d'exprimer ds en fonction de l'angle λ que fait la normale de la courbe avec l'axe des x. On a, par les formules précédentes,

$$\operatorname{tang}\lambda = -\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}\cot\varphi, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{a}{b}\cot\lambda,$$

d'où l'on tire

$$a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi = \frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda},$$

et

$$d\varphi = -\frac{a}{b}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\lambda}\, d\lambda = -\frac{ab\, d\lambda}{a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda}.$$

Il vient alors

$$ds = \frac{a^2b^2\, d\lambda}{(a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}},$$

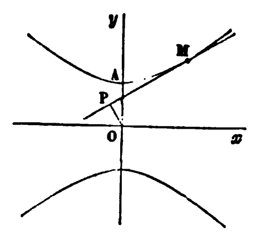
ou

$$ds = \frac{b^2}{a}\frac{d\lambda}{(1 - k^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il faut remarquer que $d\lambda$ n'est autre chose que l'angle

de contingence et qu'ainsi $\frac{ds}{d\lambda}$ représente le rayon de courbure.

222. Différentielle de l'arc d'hyperbole. — On peut obtenir pour la différentielle de l'arc d'hyperbole



une expression analogue à celle qui se rapporte à l'ellipse. Prenons pour axe des x l'axe non transverse de la courbe, pour axe des y l'axe transverse, et désignons par $2a$ la longueur du premier de ces axes, par $\frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \times 2a$ la longueur du deuxième; l'équation de la courbe sera

$$y = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{x^2+a^2}.$$

On peut exprimer les coordonnées x, y en fonction d'un même angle φ, par les formules suivantes :

$$x = a\sqrt{1-k^2}\operatorname{tang}\varphi, \quad y = \frac{ak}{\sqrt{1-k^2}} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi},$$

qui satisfont, quel que soit φ, à l'équation de la courbe. On en tire

$$dx = a\sqrt{1-k^2}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad dy = a\sqrt{1-k^2}\frac{k\sin\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

et de là résulte cette expression de $\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$,

$$(1) \qquad ds = a\sqrt{1 - k^2}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Par l'extrémité M de l'arc s dont nous supposerons l'origine en A, sur l'axe des y, menons la tangente MP et abaissons du centre la perpendiçulaire OP sur cette tangente. L'équation de la droite OP sera

$$k\sin\varphi\,\mathrm{Y} + \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{X} = 0;$$

si donc on désigne par t la partie MP de la tangente qui mesure la distance du point M à la ligne OP, on aura

$$t = \frac{a}{\sqrt{1 - k^2}}\,\mathrm{tang}\,\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi},$$

et, en différentiant cette expression,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} dt = {} & a\sqrt{1 - k^2}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \\ & + \frac{ak^2}{\sqrt{1 - k^2}}\left(\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\right). \end{aligned} \right.$$

Retranchons maintenant la formule (2) de la formule (1), il viendra

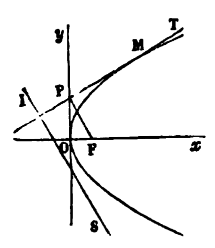
$$(3) \qquad d(s - t) = \frac{ak^2}{\sqrt{1 - k^2}}\left(\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\right);$$

la quantité t est une fonction algébrique donnée, et l'on voit que la différentielle de la différence $s - t$ a une forme analogue à celle de la différentielle d'un arc d'ellipse.

223. Différentielle de l'arc de parabole, rectification de cet arc. — Soit

$$y^2 = 2px$$

l'équation d'une parabole rapportée à son axe et à la



tangente au sommet. En désignant par α l'angle que fait la tangente de la courbe avec l'axe des x, on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y},$$

d'où

$$y = p\cot\alpha, \quad x = \frac{p}{2}\cot^2\alpha.$$

On tire de là

$$dy = -\frac{p\,d\alpha}{\sin^2\alpha}, \quad dx = -\frac{p\cot\alpha\,d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Ensuite si l'on désigne par s l'arc de la courbe, compté à partir du sommet, on aura

$$(1) \qquad ds = -\frac{p\,d\alpha}{\sin^3\alpha};$$

nous mettons le signe — devant cette expression, parce que le radical qui comportait le signe ambigu $\pm$ a disparu et que s est une fonction décroissante de α.

Désignons par t la longueur de la tangente comprise entre le point de contact M, extrémité de l'arc s, et le point P où elle rencontre l'axe des y, on a

$$t = \frac{x}{\cos\alpha} \quad \text{ou} \quad t = \frac{p}{2}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

d'où, par la différentiation,

$$(2) \qquad dt = \frac{p}{2}\frac{d\alpha}{\sin\alpha} - p\frac{d\alpha}{\sin^3\alpha};$$

en retranchant cette formule de la formule (1), on a

$$(3) \qquad d(s-t) = -\frac{p}{2}\frac{d\alpha}{\sin\alpha}.$$

Or on a vu au n° 44 que $\frac{d\alpha}{\sin\alpha}$ est la différentielle du logarithme népérien de tang $\frac{1}{2}\alpha$; on a donc

$$s - t = -\frac{p}{2}\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha + \text{const.}$$

L'arc s et la ligne t s'annulent pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, par conséquent la constante est nulle, et l'on a

$$(4) \qquad s = t - \frac{p}{2}\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha.$$

224. Le résultat que nous venons d'obtenir donne immédiatement la solution d'un problème qui offre quelque intérêt. La ligne PF qui joint le point P au foyer de la parabole est perpendiculaire sur la tangente MT et la longueur de cette ligne est

$$\text{PF} = \frac{p}{2\sin\alpha}.$$

Prenons le point I, sur le prolongement de MP, tel que MI soit égale à l'arc s; on aura

$$\text{IP} = s - t = -\frac{p}{2}\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha.$$

Maintenant menons la ligne IS perpendiculaire à IT, et prenons les deux droites IT, IS pour former un système d'axes coordonnés. Désignons par x et y les coordon-

nées du foyer F par rapport à ces deux axes, on aura

$$y = \frac{p}{2\sin\alpha}, \quad x = -\frac{p}{2}\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha.$$

La seconde de ces formules donne

$$e^{-\frac{2x}{p}} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha, \quad e^{\frac{2x}{p}} = \cot\frac{1}{2}\alpha,$$

d'où

$$e^{\frac{2x}{p}} + e^{-\frac{2x}{p}} = \frac{2}{\sin\alpha},$$

et, à cause de la première formule

$$(5) \qquad y = \frac{p}{4}\left(e^{\frac{2x}{p}} + e^{-\frac{2x}{p}}\right).$$

Il est évident, par ce qui précède, que l'équation (5) est celle de la courbe décrite par le foyer de la parabole, lorsque celle-ci roule sans glisser sur la droite fixe IT. La courbe dont il s'agit se rencontre en Mécanique; elle a reçu le nom de *chaînette*.

Rayon de courbure des sections coniques.

225. L'équation générale des sections coniques peut toujours être ramenée à la forme

$$(1) \qquad y^2 = 2px + qx^2,$$

x et y étant des coordonnées rectangulaires; on tire de cette équation, par deux différentiations successives,

$$(2) \qquad y\frac{dy}{dx} = p + qx,$$

$$(3) \qquad y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = q.$$

Si l'on multiplie entre elles les équations (1) et (3),

puis qu'on retranche l'équation (2) après l'avoir élevée au carré, on trouvera

$$y^3 \frac{d^2y}{dx^2} = -p^2.$$

L'expression

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

du rayon de courbure devient alors

$$R = \frac{\left(y^2 + y^2 \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{p^2};$$

or on a

$$y^2 + y^2 \frac{dy^2}{dx^2} = N^2,$$

N étant la longueur de la normale : donc

(4) $$R = \frac{N^3}{p^2}.$$

Ainsi, *dans les sections coniques, le rayon de courbure est proportionnel au cube de la normale.*

La formule (2) élevée au carré donne

$$y^2 \frac{dy^2}{dx^2} = p^2 + 2pqx + q^2x^2 = p^2 + qy^2,$$

et, par suite,

(5) $$N^2 = p^2 + (1 + q)y^2,$$

ce qui permet d'exprimer le rayon R en fonction de l'une des deux coordonnées.

On obtient une autre expression remarquable de R en introduisant l'angle γ que fait la normale avec le rayon vecteur issu d'un foyer. En désignant par ρ ce rayon et

par ω l'angle qu'il fait avec l'axe des x, on a, comme on sait,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 + \sqrt{1+q}\cos\omega}{p}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{\sqrt{1+q}\sin\omega\, d\omega}{p};$$

d'ailleurs l'angle γ est déterminé par la formule

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{d\rho}{\rho\, d\omega},$$

qui devient ici

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\sqrt{1+q}}{p}\rho\sin\omega = \frac{y\sqrt{1+q}}{p};$$

la formule (5) se réduit alors à

$$\text{(6)} \qquad N = \frac{p}{\cos\gamma},$$

et elle exprime que, *dans les sections coniques, la projection de la normale sur le rayon vecteur issu d'un foyer est constante et égale au paramètre.*

L'expression (4) du rayon de courbure devient, en remplaçant N par la valeur tirée de la formule (6),

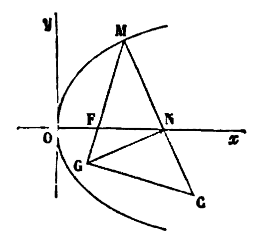
$$\text{(7)} \qquad R = \frac{p}{\cos^3\gamma},$$

et l'on peut écrire aussi

$$\text{(8)} \qquad R = \frac{N}{\cos^2\gamma}.$$

226. Cette dernière formule conduit à une construction très-simple du rayon de courbure dans les coniques. Effectivement, menons la normale MN terminée en N à l'axe focal; joignons le point M au foyer F; élevons ensuite NG perpendiculaire à MN, par l'extrémité N de cette normale; enfin, par le point G où NG rencontre MF, menons GC perpendiculaire à MF; le point C où

cette perpendiculaire coupera la normale sera le centre



de courbure de la conique au point M. En effet, on a

$$MG = \frac{MN}{\cos\gamma} = \frac{N}{\cos\gamma} \quad \text{et} \quad MC = \frac{MG}{\cos\gamma} = \frac{N}{\cos^2\gamma},$$

donc

$$MC = R.$$

Développées des sections coniques.

227. Développée de l'ellipse. — Soit

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes. On tire de cette équation, par la différentiation,

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{y}{b^2}\frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

puis

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{b^2(a^4 - c^2x^2)}{a^4y^2} = \frac{b^4 + c^2y^2}{a^2y^2},$$

en posant

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Les formules

$$x_1 = x - \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad y_1 = y + \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

qui déterminent les coordonnées du centre de courbure, donnent alors

$$(2) \qquad x_1 = +\frac{c^2 x^3}{a^4}, \quad y_1 = -\frac{c^2 y^3}{b^4}.$$

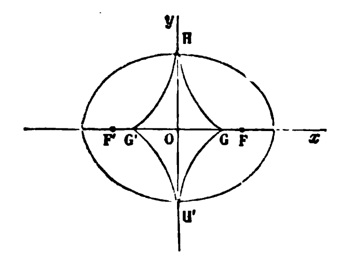
Si donc on suppose c^2 positif et que l'on fasse

$$a_1 = \frac{c^2}{a}, \quad b_1 = \frac{c^2}{b},$$

on aura, par les équations (2), en ayant égard à l'équation (1),

$$(3) \qquad \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

ce qui est l'équation de la développée de l'ellipse. Cette développée GHG'H' a pour axes ceux de la courbe, et les points G, G', où elle rencontre l'axe focal, sont situés entre les foyers F, F' de l'ellipse, à cause de $a_1 < c$; on voit en outre, par les formules (2), que chaque quadrant de l'ellipse et le quadrant correspondant de la



développée sont situés dans deux des angles adjacents formés avec l'une des directions de l'axe des x, par les

deux directions de l'axe des y. On doit remarquer aussi que la développée sera tout entière contenue dans l'ellipse, si l'on a $b_1 < b$ ou

$$a < b\sqrt{2};$$

elle coupera l'ellipse aux extrémités du petit axe, si l'on a

$$a = b\sqrt{2};$$

enfin elle coupera l'ellipse en quatre points si l'on a

$$a > b\sqrt{2}.$$

Les rayons de courbure de l'ellipse aux extrémités du petit axe et du grand axe sont respectivement $b + b_1$ et $a - a_1$ ou $\frac{a^2}{b}$ et $\frac{b^2}{a}$; la longueur du quadrant de la développée est donc

$$\frac{a^3 - b^3}{ab}.$$

Si l'on différentie l'équation (3) deux fois de suite, il viendra, en prenant $dx_1 = \text{const.}$,

$$\frac{1}{a_1}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{b_1}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{dy_1}{dx_1} = 0,$$

$$-\frac{1}{3a_1^2}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{3b_1^2}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{-\frac{4}{3}}\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 + \frac{1}{b_1}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{b_1^{\frac{2}{3}}y_1^{\frac{1}{3}}}{a_1^{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{b_1^{\frac{4}{3}}}{3a_1^{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{4}{3}}y_1^{\frac{1}{3}}};$$

le rayon de courbure R_1 de la développée de l'ellipse a donc pour expression

$$R_1 = \frac{3x_1^{\frac{1}{3}}y_1^{\frac{1}{3}}\left(a_1^{\frac{4}{3}}x_1^{\frac{2}{3}} + b_1^{\frac{4}{3}}y_1^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{a_1^{\frac{4}{3}}b_1^{\frac{4}{3}}}.$$

La valeur de $\frac{dy_1}{dx_1}$ est nulle aux points G, G′ où la courbe rencontre l'axe des x; elle est infinie aux points H, H′ où elle rencontre l'axe des y; il s'ensuit que ces quatre points sont des points de rebroussement du premier genre; pour chacun d'eux le rayon de courbure R_1 est nul. La valeur de $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ et celle de y_1 sont toujours de même signe : la développée est donc partout convexe vers l'axe des abscisses.

228. DÉVELOPPÉE DE L'HYPERBOLE. — L'analyse qui nous a conduit à la développée de l'ellipse ne suppose pas que b^2 soit une quantité positive; elle s'applique donc au cas de l'hyperbole. Si l'on écrit $-b^2$ au lieu de b^2, la quantité désignée par c^2 au numéro précédent aura pour valeur

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

et les équations (1) et (3) de ce numéro deviendront

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$(2)\qquad x_1 = +\frac{{}^2x^3}{a^4},\quad y_1 = -\frac{c^2y^3}{b^4};$$

l'équation (1) est celle de l'hyperbole et les équations (2) donnent les coordonnées du centre de courbure de cette courbe. Si l'on pose, comme au numéro précédent,

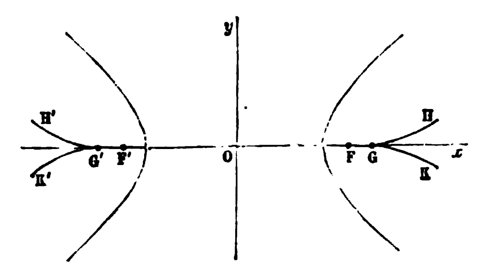
$$a_1 = \frac{c^2}{a},\quad b_1 = \frac{c^2}{b},$$

l'élimination de x et de y donnera

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

On reconnaît facilement, par ces formules, que la développée de l'hyperbole est formée de deux branches infi-

nies HGK, H′G′K′, symétriques par rapport aux deux axes, convexes vers l'axe transverse de l'hyperbole; les



points G, G′ où elle rencontre cet axe sont des points de rebroussement du premier genre; ils sont situés au delà des foyers F, F′ de l'hyperbole, à cause de $a_1 > c$.

229. Développée de la parabole. — L'équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet est

$$y^2 = 2px;$$

la différentiation donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3},$$

d'où

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right) = \frac{2px + p^2}{y^2},$$

et il en résulte, pour les coordonnées x_1, y_1 du centre de courbure, les valeurs suivantes :

$$x_1 = x - \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 3x + p,$$

$$y_1 = y + \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{y^3}{p^2};$$

d'où

$$x = \frac{1}{3}(x_1 - p), \quad y = -\sqrt[3]{p^2 y_1};$$

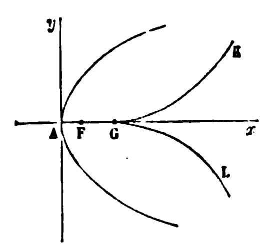
en portant ces valeurs dans l'équation de la parabole, on obtiendra celle de la développée, savoir

$$y_1^2 = \frac{8}{27} \frac{(x_1 - p)^3}{p}.$$

On en tire, par la différentiation, en prenant x_1 pour variable indépendante,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{\sqrt[3]{p}} y_1^{\frac{1}{3}}, \quad y_1 \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{p^2}} y_1^{\frac{2}{3}};$$

ces formules montrent que la développée de la parabole se compose de deux branches infinies GK, GL qui se réunissent au point G de l'axe; ce point G, dont l'ab-

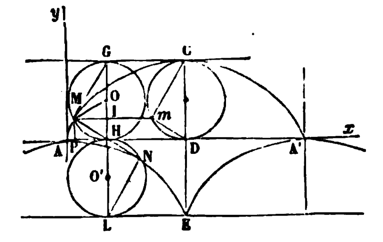


scisse est p, est un point de rebroussement du premier genre. Comme y_1 et $\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}$ ont le même signe, la courbe présente constamment sa convexité vers l'axe de la parabole.

De la cycloïde.

230. La *cycloïde* est la courbe engendrée par un point donné d'une circonférence qui *roule sans glisser* sur une droite fixe indéfinie.

Prenons pour axe des x la droite Ax sur laquelle roule la circonférence donnée, et pour origine l'un des points A de la droite Ax avec lesquels le point générateur de la cycloïde peut venir coïncider. Comme le mouvement du cercle mobile peut se perpétuer indéfiniment et qu'on peut reculer son origine autant que l'on voudra, la cycloïde est composée d'une infinité de branches égales entre elles, situées d'un même côté de la droite Ax, à droite et à gauche du point A; il est bien aisé de former l'équation de cette courbe. L'axe des y étant perpendiculaire à l'axe Ax des abscisses, considérons un point quelconque M de la cycloïde, et supposons que H soit



le point de contact du cercle générateur avec Ax, dans sa position actuelle.

Soient

$$AP = x, \quad MP = y$$

les coordonnées du point M; joignons ce point au centre O du cercle générateur HMG et abaissons la perpendiculaire MI sur GH. On aura

$$x = AH - PH = AH - MI,$$
$$y = OH - OI;$$

mais si l'on désigne par a le rayon du cercle générateur, par φ l'angle formé par la direction du rayon OM avec la direction OH qui est celle des y négatives, on aura

$$MI = a \sin\varphi, \quad OI = a \cos\varphi;$$

d'ailleurs, la ligne AH est égale à la longueur de l'arc de cercle MH $= a\varphi$, d'après la définition de la cycloïde. On a donc

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi), \\ y = a(1 - \cos\varphi), \end{cases}$$

et l'on obtiendra tous les points de la courbe en donnant à φ, dans ces formules, toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

La seconde des formules (1) donne

$$(2)\qquad \cos\varphi = \frac{a-y}{a}, \quad \varphi = \arc\cos\frac{a-y}{a},$$

puis

$$(3)\qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a},$$

et, en substituant ces valeurs dans la première formule, on obtient

$$(4)\qquad x = a \arc\cos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2},$$

le radical devant être pris avec l'un et l'autre signe.

L'équation (4) est celle de la courbe entre les coordonnées x et y, mais il n'y a aucun avantage à la substituer aux formules (1) et nous conserverons celles-ci.

231. Tangente et normale à la cycloïde. — En différentiant les équations (1), il vient

$$(5)\qquad \begin{cases} dx = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi, \\ dy = a\sin\varphi\,d\varphi. \end{cases}$$

L'expression de la sous-normale N′ est, en vertu des formules (1) et (5),

$$(6)\qquad N' = y\frac{dy}{dx} = a\sin\varphi = \text{PH};$$

il résulte de là que MH est la normale de la courbe et

que, par suite, la tangente est la ligne MG qui joint le point M au point G diamétralement opposé à H, dans le cercle générateur.

Ce résultat conduit à un procédé fort simple, pour construire la tangente en un point quelconque M de la cycloïde. Remarquons d'abord que le maximum de y est $2a$, et que ce maximum a lieu quand φ est égal à une demi-circonférence ou à un multiple impair de la demi-circonférence; mais, comme ce que nous disons de l'une des branches de la courbe s'applique à toutes les autres, nous n'avons à considérer que la seule branche qui a le point A pour origine; alors la valeur de x qui répond au maximum est πa : c'est l'abscisse du milieu de la *base* de la cycloïde. Cela posé, construisons sur l'ordonnée maxima CD, comme diamètre, le cercle générateur CmD; menons ensuite, par le point M, la droite Mm parallèle à Ax, joignons le point m, où cette droite rencontre la demi-circonférence CmD, au point C, et menons enfin, par le point M, la droite MG parallèle à mC; cette droite sera la tangente demandée.

Au moyen de la formule (3), l'expression de la sous-normale N' peut être mise sous la forme

$$(7) \qquad N' = \sqrt{2ay - y^2},$$

et, comme la normale N est égale à $\sqrt{N'^2 + y^2}$, on a

$$N = \sqrt{2ay},$$

ou encore

$$(8) \qquad N = 2a \sin \frac{1}{2} \varphi.$$

Enfin, si dans la formule (7) on écrit au lieu de N' son expression $y \frac{dy}{dx}$, on obtiendra l'*équation différentielle*

de la cycloïde, savoir

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a - y}{y}}. \tag{9}$$

Il y a quelquefois avantage à transporter l'origine des coordonnées au sommet C de la cycloïde et à prendre pour axe des x et des y les directions CG et CD. Il faut alors remplacer, dans nos formules, x par $\pi a + x$ et y par $2a - y$; si, par exemple, on fait ce changement dans l'équation (9), elle deviendra

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}};$$

nous n'avons pas changé le signe du premier membre, parce que le signe du second membre demeure indéterminé.

232. QUADRATURE DE LA CYCLOÏDE. — Désignons par u l'aire comprise entre la courbe, sa base et l'ordonnée $MP = y$, on a

$$du = y\,dx = a^2(1 - \cos\varphi)^2 d\varphi = a^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi,$$

ou, en mettant $\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$ au lieu de $\cos^2\varphi$,

$$du = a^2\left(\frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi;$$

le second membre de cette formule est évidemment la différentielle de la fonction

$$a^2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right);$$

d'ailleurs cette fonction s'annule, ainsi que u, en même temps que φ; on a donc

$$u = a^2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right). \tag{10}$$

Si l'on veut l'aire totale U, comprise entre la première branche de la courbe et sa base, il faudra faire $\varphi = 2\pi$ dans la formule précédente, ce qui donnera

$$(11) \qquad U = 3\pi a^2;$$

l'aire entière d'une branche de cycloïde est donc triple de l'aire du cercle générateur.

233. Rectification de la cycloïde. — Les formules (5) (n° 231) donnent

$$dx^2 + dy^2 = 2a^2(1 - \cos\varphi)\,d\varphi^2 = 4a^2 \sin^2\frac{1}{2}\varphi\,d\varphi^2,$$

d'où

$$(12) \qquad ds = 2a \sin\frac{1}{2}\varphi\,d\varphi;$$

le second membre de cette formule est la différentielle de $-4a\cos\frac{1}{2}\varphi$; on a donc

$$s = -4a\cos\frac{1}{2}\varphi + \text{const.}$$

Prenons le point A pour origine de l'arc s; cet arc s'annulant avec φ, la constante est égale à $4a$, et l'on a

$$s = 4a\left(1 - \cos\frac{1}{2}\varphi\right),$$

ou

$$(13) \qquad s = 8a \sin^2\frac{1}{4}\varphi.$$

Si l'on veut avoir la longueur S de l'une des branches de la courbe, il faudra faire $\varphi = 2\pi$, dans la formule précédente, et l'on aura

$$(14) \qquad S = 8a.$$

Ainsi la longueur d'une branche entière de cycloïde est égale au quadruple du diamètre du cercle générateur.

234. Rayon de courbure de la cycloïde. — L'angle que fait la tangente de la courbe avec l'axe des y étant égal à la moitié de l'angle φ, il s'ensuit que l'angle de contingence est égal à $\frac{1}{2}\, d\varphi$; le rayon de courbure R est donc

$$R = 2\frac{ds}{d\varphi};$$

mais la formule (12) montre que $\frac{ds}{d\varphi}$ est égal à $2a \sin\frac{1}{2}\varphi$, ce qui, d'après la formule (8), est précisément l'expression de la normale N; on a donc

$$(15) \qquad R = 2N;$$

ainsi, dans la cycloïde, le rayon de courbure est double de la normale.

235. Développée de la cycloïde. — Le résultat qui précède permet de trouver sans calcul la développée de la cycloïde. Effectivement, prolongeons le diamètre HG du cercle O, d'une quantité HL = HG, au-dessous de Ax (*voir* la figure du n° 230), et construisons, sur HL comme diamètre, la circonférence O′ qui rencontre en N la normale MH prolongée, menons ensuite à cette circonférence la tangente EL parallèle à Ax, qui rencontre en E la direction de l'ordonnée maxima CD. L'égalité des angles MHG, LHN entraîne celle des arcs MG, LN et celle des arcs supplémentaires MH, NH; les cordes MH et NH sont donc elles-mêmes égales, et, par conséquent, le centre de courbure relatif au point M est situé en N; en outre, l'arc HN est égal à la longueur AH et il s'ensuit que le supplément LN de cet arc est égal à HD ou à LE.

Il résulte de là que la développée de la cycloïde peut être engendrée par un point N d'une circonférence de

rayon a qui roulerait sans glisser sur une parallèle EL à Ax menée au-dessous de cette droite à une distance égale au diamètre du cercle, de manière que les positions du point générateur N sur la droite EL répondent aux mêmes abscisses que les ordonnées maxima de la cycloïde proposée. Cette développée est donc une seconde cycloïde égale à la première.

On peut arriver à la même conséquence sans invoquer la formule qui fait connaître le rayon de courbure. En effet, MG étant la tangente à la première cycloïde au point M, il s'ensuit que NH est la tangente en N à la seconde cycloïde; celle-ci est donc l'enveloppe des normales de la proposée, et par conséquent elle est sa développée.

Enfin la propriété que nous étudions résulte encore très-facilement des formules générales qui donnent les coordonnées x_1, y_1 du centre de courbure. La différentiation des équations (5) (n° 231) donne, en prenant $d\varphi$ constante,

$$(16) \qquad d^2x = a\sin\varphi d\varphi^2, \quad d^2y = a\cos\varphi d\varphi^2,$$

et au moyen des formules (5) et (16), les formules du n° 197 donnent

$$x_1 = a(\varphi + \sin\varphi), \quad y_1 = -a(1 - \cos\varphi).$$

Si maintenant on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point dont les coordonnées sont $x = \pi a$, $y = -2a$, il faudra écrire $\pi a + x_1$ et $-2a + y_1$ au lieu de x_1 et de y_1 et, si l'on met en même temps $\varphi_1 + \pi$ au lieu de φ, on aura les équations

$$x_1 = a(\varphi_1 - \sin\varphi_1), \quad y_1 = a(1 - \cos\varphi_1),$$

qui représentent bien une cycloïde égale à la proposée.

236. Cette propriété de la cycloïde donne immédiatement sa rectification. En effet, l'arc EN de la développée est égal à la différence

$$EC - MN = 4a - 4a \sin \frac{1}{2} \varphi$$

des rayons de courbure de la proposée aux points C et M. D'ailleurs, il est évident que l'arc $s = AM$ s'obtiendra en changeant φ en $\pi - \varphi$ dans l'expression précédente ; on a donc

$$s = 4a - 4a \cos \frac{1}{2} \varphi = 8a \sin^2 \frac{1}{2} \varphi,$$

comme nous l'avons déjà trouvé plus haut.

La même propriété de la cycloïde fournit encore un moyen d'obtenir la quadrature de cette courbe, mais nous nous bornerons à cette indication que le lecteur pourra facilement développer.

Des épicycloïdes.

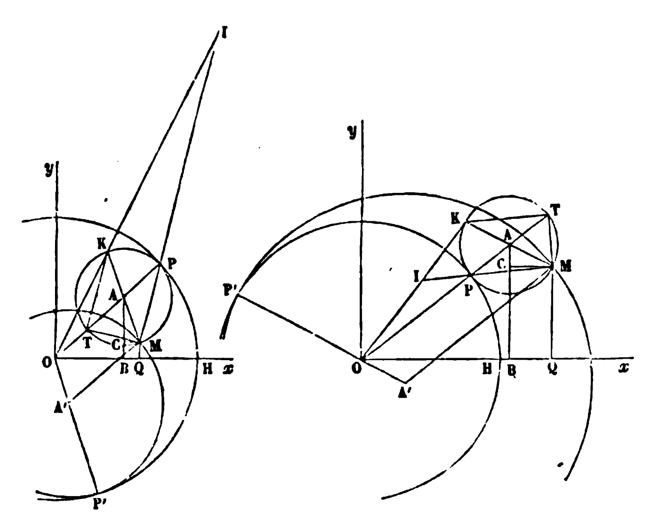
237. On nomme *épicycloïde* la courbe engendrée par un point donné d'une circonférence qui roule sans glisser sur une circonférence fixe. La cycloïde appartient à la classe des épicycloïdes ; elle répond au cas où le rayon de la circonférence fixe devient infini.

L'épicycloïde est dite *intérieure* ou *extérieure*, selon qu'elle est située dans l'intérieur du cercle fixe, ou au dehors de ce cercle.

Toute épicycloïde peut être engendrée par le moyen de deux cercles différents roulant sur le même cercle fixe. Les rayons de ces cercles ont pour somme ou pour différence le rayon du cercle fixe, selon qu'il s'agit d'une épicycloïde intérieure ou d'une épicycloïde extérieure.

En effet, supposons que l'épicycloïde intérieure ou

extérieure considérée soit engendrée par un point M du cercle A roulant sur le cercle fixe O. Soient H l'un des points du cercle fixe avec lesquels le point générateur peut venir coïncider, et P le point de contact actuel des deux circonférences. Joignons AM et construisons sur



les lignes AO, AM le parallélogramme OAMA'; décrivons enfin une circonférence du point A' comme centre avec le rayon A'M. Cette circonférence sera tangente à la circonférence O en un point P' situé sur le prolongement de la ligne OA'; car, si l'on désigne par r le rayon du cercle O, par a et a' les rayons des cercles A et A', on a évidemment

$$r = a + a',$$

dans le cas de l'épicycloïde intérieure, et

$$r = a' - a,$$

dans le cas de l'épicycloïde extérieure.

Maintenant les angles PAM, P'A'M, POP' étant égaux

entre eux, on a

$$\frac{\text{arc PM}}{a} = \frac{\text{arc P}'\text{M}}{a'} = \frac{\text{arc PP}'}{r},$$

d'où

$$\frac{\text{arc P}'\text{M} \pm \text{arc PM}}{a' \pm a} = \frac{\text{arc PP}'}{r},$$

et, comme $a' \pm a$ est égal à r, on a

$$\text{arc P}'\text{M} \pm \text{arc PM} = \text{arc P}'\text{H} \pm \text{arc PH};$$

les signes supérieurs répondent à l'épicycloïde intérieure, les inférieurs à l'épicycloïde extérieure. Or, dans les deux cas, on a

$$\text{arc PM} = \text{arc PH},$$

par la nature de la courbe; donc on a aussi

$$\text{arc P}'\text{M} = \text{arc P}'\text{H},$$

et, en conséquence, l'épicycloïde peut être engendrée par un point M de l'une ou de l'autre des circonférences A, A' roulant sur la circonférence O.

238. Rapportons la courbe à deux axes rectangulaires Ox, Oy, dont le premier passe par le point H, et désignons par φ l'angle MAP dont a tourné le rayon AM du point générateur en s'écartant de sa direction initiale HO; cet angle φ pourra varier de $-\infty$ à $+\infty$, car on peut regarder le mouvement comme indéfini. L'arc PM et son égal PH seront alors représentés par $a\varphi$ et l'angle POH sera $\frac{a\varphi}{r}$.

Soient $x = \text{OQ}$, $y = \text{MQ}$ les coordonnées du point M; si l'on abaisse AB perpendiculaire sur Ox et MC perpendiculaire sur AB, on aura, d'après la figure,

$$x = \text{OB} + \text{MC}, \quad y = \text{AB} - \text{AC},$$

et les triangles OAB, OMC donneront

$$x = (r \pm a)\cos\frac{a\varphi}{r} \mp a\cos\left(\frac{a\varphi}{r} \pm \varphi\right),$$
$$y = (r \pm a)\sin\frac{a\varphi}{r} \mp a\sin\left(\frac{a\varphi}{r} \pm \varphi\right);$$

les signes supérieurs ayant lieu pour l'épicycloïde extérieure et les inférieurs pour l'épicycloïde intérieure. Posons

$$\frac{a}{r} =$$

on aura, pour l'épicycloïde extérieure,

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{n+1}{n}\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi, \\ \dfrac{y}{a} = \dfrac{n+1}{n}\sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi, \end{cases}$$

et ces formules conviendront aussi à l'épicycloïde intérieure, si l'on y remplace a, n, φ, par $-a$, $-n$, $-\varphi$,

L'épicycloïde est une courbe algébrique lorsque le nombre positif ou négatif n est rationnel. Il convient de remarquer le cas de $n = -\frac{1}{2}$, qui est celui de l'épicycloïde intérieure rectiligne; la deuxième équation (1) devient $y = 0$, et la courbe se réduit à un diamètre du cercle fixe.

Dans le cas de $n = -\frac{1}{4}$, les équations (1) deviennent, en changeant a en $-a$, φ en $-\varphi$,

$$\frac{x}{a} = 3\cos\frac{\varphi}{4} + \cos\frac{3\varphi}{4} = 4\cos^3\frac{\varphi}{4},$$
$$\frac{y}{a} = 3\sin\frac{\varphi}{4} - \sin\frac{3\varphi}{4} = 4\sin^3\frac{\varphi}{4},$$

d'où, par l'élimination de φ, et en remettant r au lie de $4a$,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}.$$

Dans le cas de $n = 1$, on a

$$\frac{x}{a} = 2\cos\varphi - \cos 2\varphi, \quad \frac{y}{a} = 2\sin\varphi - \sin 2\varphi,$$

ou

$$\frac{x-a}{2a} = \cos\varphi(1 - \cos\varphi), \quad \frac{y}{2a} = \sin\varphi(1 - \cos\varphi).$$

Si l'on désigne par ρ et ω deux coordonnées polaires, telles que

$$x - a = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega,$$

les formules précédentes donneront

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\omega, \quad \text{d'où} \quad \varphi = \omega,$$

et

$$\rho = 2a(1 - \cos\omega) \quad \text{ou} \quad \rho = 4a\sin^2\frac{1}{2}\omega.$$

En général, l'épicycloïde est formée d'une infinité de branches égales entre elles, et les points où ces branches se terminent sur le cercle fixe sont des points de rebroussement. Le nombre des branches devient limité quand le rapport n est un nombre rationnel.

239. Tangente et normale à l'épicycloïde. — La différentiation des équations (1) donne

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{a} = (n+1)[\sin(n+1)\varphi - \sin n\varphi]\,d\varphi = 2(n+1)\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\left(n\varphi + \dfrac{\varphi}{2}\right)d\varphi, \\ \dfrac{dy}{a} = (n+1)[\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi]\,d\varphi = 2(n+1)\sin\dfrac{\varphi}{2}\sin\left(n\varphi + \dfrac{\varphi}{2}\right)d\varphi, \end{cases}$$

d'où

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\left(n\varphi + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Cette formule montre que la tangente au point M de l'épicycloïde est la droite MT qui joint le point M au point T diamétralement opposé à P, dans le cercle A. Effectivement l'angle que fait cette ligne MT avec l'axe des x est égal à la somme des angles AOx, OTM, somme qui est toujours égale à $n\varphi + \frac{\varphi}{2}$, en négligeant les multiples de la demi-circonférence. Il résulte de là que la normale au point M de l'épicycloïde est la droite MP qui joint le point M au point de contact actuel des deux circonférences O et A.

240. Rectification de l'épicycloïde. — Si l'on ajoute les équations (2), après les avoir élevées au carré, et qu'on extraie ensuite la racine carrée de l'équation obtenue, il viendra

$$(4) \qquad \frac{ds}{a} = 2(n+1)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi;$$

et, par conséquent,

$$\frac{s}{a} = -4(n+1)\cos\frac{\varphi}{2} + \text{const.}$$

Supposons que H soit l'origine de l'arc s, on aura simultanément $s=0$ et $\varphi=0$; la constante est donc $4(n+1)$, et l'on a

$$\frac{s}{a} = 4(n+1)\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right) = 8(n+1)\sin^2\frac{\varphi}{4}.$$

Pour avoir la longueur de l'arc S qui forme l'une des branches de la courbe, il faudra faire $\varphi = 2\pi$, et l'on aura

$$(5) \qquad S = 8(n+1)a.$$

241. Quadrature de l'épicycloïde. — Les formules (1)

et (2) donnent

$$\frac{xdy - ydx}{a^2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n}(1-\cos\varphi)d\varphi,$$

ou

$$du = \frac{(n+1)(2n+1)}{2n}a^2(d\varphi - \cos\varphi\, d\varphi),$$

u étant l'aire comprise entre la courbe, le rayon vecteur OM du point M et l'axe des x. Or $d\varphi - \cos\varphi d\varphi$ est la différentielle de $\varphi - \sin\varphi$; d'ailleurs cette fonction s'annule, ainsi que u, pour $\varphi = 0$: donc on a

$$u = \frac{(n+1)(2n+1)}{2n}a^2(\varphi - \sin\varphi).$$

Si l'on veut l'aire U comprise entre une branche entière de la courbe et les rayons extrêmes, il faudra faire $\varphi = 2\pi$, ce qui donnera

$$\mathrm{U} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n}\pi a^2.$$

Le secteur circulaire compris entre les mêmes rayons extrêmes a pour valeur $\frac{\pi a^2}{n}$; l'aire comprise entre le cercle fixe et la branche de courbe considérée est donc $\mathrm{U} - \frac{\pi a^2}{n}$; en désignant par U_1 cette aire, on aura

$$\mathrm{U}_1 = (2n+3)\pi a^2;$$

comme nous admettons pour n des valeurs négatives, cette formule convient au cas de l'épicycloïde intérieure comme à celui de l'épicycloïde extérieure; elle se réduit à $\mathrm{U}_1 = 3\pi a^2$, dans le cas de $n = 0$, et l'on retrouve ainsi le résultat relatif à la cycloïde, obtenu précédemment.

242. Rayon de courbure de l'épicycloïde. — La formule (3) montre que l'angle de contingence $d\sigma$ est égal à

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)d\varphi :$$

donc le rayon de courbure $R = \frac{ds}{d\sigma}$ a pour valeur, d'après la formule (4),

$$(6) \qquad R = \frac{4(n+1)}{2n+1} a \sin\frac{\varphi}{2},$$

et, à cause de $2a \sin\frac{\varphi}{2} = MP$ (*voir* la figure du n° 237), on a

$$(7) \qquad \frac{R}{MP} = \frac{2n+2}{2n+1} = \frac{2r \pm 2a}{r \pm 2a}.$$

Menons par le point T la corde TK parallèle à la normale MP, et joignons OK qui rencontre en I cette normale; on aura, dans le triangle OKT,

$$\frac{PI}{KT} = \frac{OP}{OT},$$

d'où, à cause de KT = MP,

$$\frac{MI}{MP} = \frac{OP + OT}{OT} = \frac{2r \pm 2a}{r \pm 2a}:$$

les signes supérieurs se rapportent ici, comme dans la formule (7), à l'épicycloïde extérieure et les inférieurs à l'épicycloïde intérieure. La comparaison de cette dernière formule et de la formule (7) donne

$$R = MI,$$

ce qui montre que le point I est le centre de courbure relatif au point M.

243. Développée de l'épicycloïde. — La différentiation de l'équation (3) donne

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{2n+1}{2}\frac{d\varphi}{dx};$$

par conséquent les équations qui déterminent les coordonnées x_1, y_1 du centre de courbure I seront

$$x_1 = x - \frac{2}{2n+1}\frac{dy}{d\varphi}, \quad y_1 = y + \frac{2}{2n+1}\frac{dx}{d\varphi},$$

ou, d'après les formules (1) et (2),

$$\frac{x_1}{a} = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{n+1}{n}\cos n\varphi + \cos(n+1)\varphi\right],$$
$$\frac{y_1}{a} = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{n+1}{n}\sin n\varphi + \sin(n+1)\varphi\right].$$

Faisons tourner les axes d'une quantité angulaire égale à $n\pi$, en élevant l'axe des x vers la partie positive de l'axe des y, et désignons par x'_1 et y'_1 les coordonnées du centre de courbure relatives aux nouveaux axes, on aura

$$x'_1 = x_1 \cos n\pi + y_1 \sin n\pi, \quad y'_1 = -x_1 \sin n\pi + y_1 \cos n\pi,$$

et, par conséquent, en faisant $a_1 = \dfrac{a}{2n+1}$, $\varphi_1 = \varphi - \pi$,

(18) $$\begin{cases} \dfrac{x'_1}{a_1} = \dfrac{n+1}{n}\cos n\varphi_1 - \cos(n+1)\varphi_1, \\ \dfrac{y'_1}{a_1} = \dfrac{n+1}{n}\sin n\varphi_1 - \sin(n+1)\varphi_1. \end{cases}$$

Ces formules (8) ne diffèrent des formules (1) que par le changement du paramètre a en $a_1 = \dfrac{a}{2n+1}$; donc *la développée de l'épicycloïde est une épicycloïde semblable.*

De la développante du cercle.

244. Remplaçons dans les équations (1) du n° 238, qui appartiennent à l'épicycloïde, a par sa valeur nr, et introduisons, au lieu de φ, l'angle $\psi = n\varphi$ que forme la ligne

des centres des deux circonférences avec l'axe des x; les équations de l'épicycloïde prendront cette forme

$$\frac{x}{r} = \cos\psi\left(1 + 2n\sin^2\frac{\psi}{2n}\right) + \psi\sin\psi\,\frac{\sin\frac{\psi}{n}}{\frac{\psi}{n}},$$

$$\frac{y}{r} = \cos\psi\left(1 + 2n\sin^2\frac{\psi}{2n}\right) - \psi\cos\psi\,\frac{\sin\frac{\psi}{n}}{\frac{\psi}{n}}.$$

Supposons maintenant que le rayon a du cercle générateur devienne infini, n tendra lui-même vers l'infini, le rapport $\dfrac{\sin\frac{\psi}{n}}{\frac{\psi}{n}}$ tendra vers l'unité et $2n\sin^2\dfrac{\psi}{2n}$ vers zéro; on a donc, dans ce cas limite,

$$\frac{x}{r} = \cos\psi + \psi\sin\psi,$$

$$\frac{y}{r} = \sin\psi - \psi\cos\psi.$$

Ces équations, qu'il est bien aisé de former directement, appartiennent à la développante du cercle ; celle-ci se compose de deux branches infinies dont le point de réunion est un point de rebroussement, et qui se rapportent respectivement aux deux mouvements de sens contraires qu'on peut attribuer à la tangente génératrice.

La propriété de l'épicycloïde d'être semblable à sa développée n'a plus lieu à la rigueur dans ce cas limite : cependant on doit regarder la développante du cercle et la circonférence elle-même comme appartenant à la classe des épicycloïdes, et l'une et l'autre courbe répond au cas de $n = \infty$; car, si l'on fait rouler un cercle de rayon a

sur un cercle infiniment petit, le point du cercle mobile qui est, à l'origine, sur la ligne des centres décrira une courbe infiniment peu différente de la circonférence de rayon $2a$.

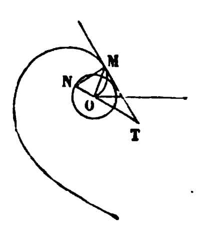
De la spirale d'Archimède et de la spirale hyperbolique.

245. La *spirale d'Archimède* est la courbe représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho = a\omega,$$

où a désigne une ligne donnée.

Pour la construire, il suffit de décrire un cercle de l'origine comme centre avec le rayon a; les arcs de ce cercle comptés à partir de l'axe fixe seront les longueurs des rayons vecteurs de la courbe dont les directions passent par leurs extrémités.



L'inclinaison μ de la tangente sur le rayon vecteur, la sous-tangente N′ et la sous-normale T′ ont ici pour valeurs

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho} = \frac{\rho}{a} = \omega, \quad T' = \frac{\rho^2 d\omega}{d\rho} = \frac{\rho^2}{a} = a\omega^2,$$

$$N' = \frac{d\rho}{d\omega} = a;$$

ainsi la sous-normale est constante, ce qui fournit un procédé facile pour construire la tangente à la courbe.

Le rayon de courbure est, en introduisant la normale $N = \sqrt{\rho^2 + N'^2}$,

$$R = \frac{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2a^2} = \frac{N^3}{N^2 + a^2},$$

et, si l'on désigne par a' la projection de la sous-normale a sur la normale N, on aura

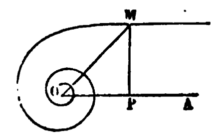
$$R = \frac{N^2}{N + a'},$$

expression qu'il est facile de construire.

246. On nomme *spirale hyperbolique* la courbe représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho\omega = a,$$

où a est une ligne donnée. Pour $a = 0$, ρ est infini; il décroît quand ω augmente et s'annule pour $\omega = \infty$. La courbe fait ainsi une infinité de révolutions autour de



l'origine O sans jamais atteindre ce point qui est un *point asymptote*. L'ordonnée $MP = \rho \sin\omega$ de la courbe a pour valeur

$$\rho \sin\omega = a \frac{\sin\omega}{\omega},$$

et elle se réduit à a pour $\omega = 0$; il en résulte que la courbe a pour asymptote la parallèle à l'axe menée à une distance a de cet axe.

Les quantités $\tang\mu$, T', N' ont ici pour valeurs

$$\tang\mu = -\frac{\rho\omega^2}{a} = -\omega, \quad T' = -a, \quad N' = -\frac{a}{\omega^2};$$

la sous-tangente étant constante, il en résulte une construction facile de la tangente à la courbe.

La construction du rayon de courbure n'a elle-même aucune difficulté; mais elle n'offre pas assez d'intérêt pour que nous nous arrêtions à la développer.

De la spirale logarithmique.

247. La *spirale logarithmique* est la courbe représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$(1) \qquad \rho = ae^{m\omega},$$

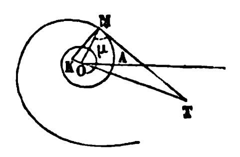
où a désigne une ligne donnée, m un nombre donné.

Il faut remarquer que cette équation représente la même courbe, quelle que soit la ligne donnée a; car, si l'on fait tourner l'axe fixe à partir duquel on compte l'angle ω d'une quantité quelconque α, pour avoir l'équation de la courbe rapportée à ce nouvel axe, on devra remplacer ω par $\omega + \alpha$, ce qui donnera, en posant $a' = ae^{m\alpha}$,

$$\rho = a'e^{m\omega}.$$

On pourrait, d'après cela, supposer $a = 1$, mais nous conserverons l'équation (1), pour l'homogénéité des formules.

L'équation (1) donne $\rho = a = \text{OA}$ pour $\omega = 0$, et si l'on fait croître ω de 0 à $+\infty$, ρ prendra des valeurs correspondantes infiniment croissantes. Au contraire,



ρ décroîtra de a à 0, si l'on donne à ω des valeurs négatives décroissantes de 0 à $-\infty$. Ainsi la courbe fait. dans

l'un et l'autre sens, une infinité de révolutions autour du pôle, à partir du point A.

La différentiation de l'équation (1) donne

$$(2) \qquad \frac{d\rho}{d\omega} = mae^{m\omega}, \quad \text{ou} \quad \frac{d\rho}{d\omega} = m\rho.$$

Par suite, l'inclinaison μ de la tangente sur le rayon vecteur, la sous-tangente T′ et la sous-normale N′ auront pour valeurs

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\mu = \frac{1}{m}, \quad T' = \frac{\rho}{m}, \quad N' = m\rho.$$

La première de ces formules (3) exprime que :

Dans la spirale logarithmique, la tangente fait un angle constant avec le rayon vecteur.

La différentielle de l'aire d'un secteur de la courbe est

$$du = \frac{1}{2}\rho^2 d\omega = \frac{1}{2m}\rho d\rho,$$

$\rho d\rho$ est la différentielle de $\frac{\rho^2}{2}$: on a donc

$$u = \frac{\rho^2}{4m} + \text{const.}$$

Si l'on veut que l'aire u s'annule en même temps que ω, la constante sera $-\frac{a^2}{4m}$, et l'on aura

$$u = \frac{\rho^2 - a^2}{4m}.$$

La différentielle ds de l'arc de la courbe est

$$(4) \quad ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} = \sqrt{m^2+1}\,\rho\, d\omega = a\sqrt{m^2+1}\,e^{m\omega} d\omega = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m} d\rho,$$

d'où

$$s = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\rho + \text{const.};$$

si l'on compte l'arc s à partir du point A, pour lequel ρ est égal à a, on aura

$$s = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}(\rho - a).$$

L'angle de contingence, qui est en général $d\mu + d\omega$, se réduit ici à $d\omega$; le rayon de courbure R est donc $\frac{ds}{d\omega}$, et, d'après les formules (2) et (4), on a

$$(5) \qquad R = \sqrt{m^2+1}\,\rho.$$

Or cette expression est celle de la longueur $N = \sqrt{\rho^2 + N'^2}$ de la normale; donc le centre de courbure n'est autre que l'extrémité K de la sous-normale.

Il est bien facile, d'après cela, d'avoir l'équation de la développée de la spirale logarithmique. En effet, les coordonnées ρ_1, ω_1 du centre de courbure K sont

$$\rho_1 = N' = m\rho = mae^{m\omega}, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2} + \omega,$$

ce qui donne, par l'élimination de ω,

$$(6) \qquad \rho_1 = mae^{m\omega_1 - m\frac{\pi}{2}};$$

donc la spirale logarithmique a pour développée une deuxième spirale logarithmique qui lui est égale et qui a le même pôle.

248. Ainsi que nous l'avons dit plus haut, on peut ramener l'équation (6) à la forme (1) en faisant tourner l'axe autour du pôle d'une quantité convenable α; comme on est libre d'ajouter à α ou d'en retrancher un nombre entier de circonférences sans que la nouvelle direction de l'axe soit changée, j'écrirai $\alpha + 2i\pi$ au lieu de α, i étant un entier indéterminé, α un angle compris entre o et 2π.

Je remplacerai donc dans l'équation (6) ω_1 par $\omega + \alpha + 2i\pi$, et en même temps j'écrirai ρ au lieu de ρ_1 ; alors l'équation de la développée sera

$$\rho = mae^{m\left(\alpha + 2i\pi - \frac{\pi}{2}\right) + m\omega},$$

et elle se réduira à

$$\rho = ae^{m\omega},$$

si l'on détermine α par la condition

$$me^{m\left(\alpha + 2i\pi - \frac{\pi}{2}\right)} = 1,$$

ou

$$(7) \qquad \alpha = -(4i - 1)\frac{\pi}{2} - \frac{\log m}{m},$$

la caractéristique *log* dénotant un logarithme népérien.

Si le nombre m est tel que l'on ait

$$(8) \qquad \frac{\log m}{m} = -(4i - 1)\frac{\pi}{2},$$

l'équation (7) donnera

$$\alpha = 0,$$

et, dans ce cas, la spirale logarithmique (1) sera, à elle-même, sa propre développée. La fonction $\frac{\log m}{m}$, dont la dérivée est $\frac{1 - \log m}{m^2}$, croît de $-\infty$ à $+\frac{1}{e}$, quand on fait croître m de o à $+e$; elle décroît ensuite de $\frac{1}{e}$ à o quand m augmente de $+e$ à $+\infty$; il en résulte que, si le nombre entier i est positif, il y aura une valeur de m propre à vérifier l'équation (8) ; donc il existe une infinité de spirales logarithmiques qui ont cette propriété remarquable de coïncider avec leur développée.

Application de la théorie des enveloppes.

249. Nous terminerons ce Chapitre en présentant deux exemples de la méthode exposée au n° **207**, pour trouver les courbes enveloppes.

PROBLÈME I. — *Les variables x_1 et y_1 étant liées entre elles par la relation*

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^m + \left(\frac{y_1}{b}\right)^m = 1, \tag{1}$$

où a et b sont des constantes données, on demande de trouver l'enveloppe des courbes représentées par l'équation

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \left(\frac{y}{y_1}\right)^n = 1. \tag{2}$$

x_1 et y_1 étant des fonctions d'un même paramètre variable, il faut d'abord former la différentielle de l'équation (2), par rapport à ce paramètre; on a ainsi

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^n \frac{dx_1}{x_1} + \left(\frac{y}{y_1}\right)^n \frac{dy_1}{y_1} = 0;$$

mais, comme x_1 et y_1 sont liées par l'équation (1), on a aussi, en différentiant cette équation,

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^m \frac{dx_1}{x_1} + \left(\frac{y_1}{b}\right)^m \frac{dy_1}{y_1} = 0;$$

l'élimination de $\frac{dy_1}{dx_1}$ entre les deux équations précédentes donne

$$\frac{\left(\frac{x}{x_1}\right)^n}{\left(\frac{x_1}{a}\right)^m} = \frac{\left(\frac{y}{y_1}\right)^n}{\left(\frac{y_1}{b}\right)^m}. \tag{3}$$

Cette équation (3) est celle qui résulte de la différentiation de l'équation (2), par rapport au paramètre variable. Or, en vertu des équations (1) et (2), la somme des numérateurs des membres de la formule (3) est égale à 1, et la même chose a lieu à l'égard des dénominateurs; par conséquent chaque membre de cette formule (3) doit être égalé à l'unité; on a donc

$$(4)\qquad \left(\frac{x_1}{a}\right)^{m+n} = \left(\frac{x}{a}\right)^{n}, \quad \left(\frac{y_1}{b}\right)^{m+n} = \left(\frac{y}{b}\right)^{n}.$$

L'élimination de x_1 et y_1 entre les équations (1) et (4) se fait immédiatement; on obtient pour l'équation de l'enveloppe demandée

$$(5)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mn}{m+n}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mn}{m+n}} = 1.$$

Il faut remarquer le cas où l'on a $b = a$, $m = 2$, $n = 1$; si les coordonnées sont rectangulaires, l'enveloppée est une droite dont la partie comprise entre les axes a une longueur constante $2a$; l'enveloppe représentée par l'équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

est une épicycloïde, comme on l'a vu au n° 238.

250. Problème II. — *Des rayons parallèles viennent rencontrer la circonférence d'un cercle et se réfléchissent en faisant avec la normale un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence; on demande de trouver l'enveloppe des rayons réfléchis.*

L'enveloppe demandée est ce que l'on nomme une *caustique par réflexion*. Prenons pour axes coordonnés deux diamètres rectangulaires dont l'un, celui des x, soit parallèle aux rayons incidents. Soient $a\cos\varphi$, $a\sin\varphi$ les

coordonnées du point de la circonférence où tombe un rayon incident, la direction du rayon réfléchi fera avec l'axe des x l'angle 2φ, et l'équation de ce rayon sera

$$(y - a\sin\varphi) = \operatorname{tang} 2\varphi\,(x - a\cos\varphi)$$

ou

$$y\cos 2\varphi - x\sin 2\varphi + a\sin\varphi = 0.$$

Il reste à éliminer φ entre cette équation et la suivante :

$$y\sin 2\varphi + x\cos 2\varphi - \frac{a}{2}\cos\varphi = 0,$$

qu'on en déduit par la différentiation relative à φ. En résolvant ces deux équations par rapport à x et y, il vient

$$x = \frac{a}{4}(3\cos\varphi - \cos 3\varphi),$$

$$y = \frac{a}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi).$$

En se reportant aux formules du n° 238, on reconnaît que la caustique représentée par ces équations n'est autre chose qu'une épicycloïde extérieure engendrée par un cercle d'un rayon égal à $\frac{1}{4}a$, roulant sur un cercle de rayon $\frac{1}{2}a$ concentrique au cercle donné.

CHAPITRE IX.

THÉORIE DES COURBES GAUCHES ET DES SURFACES COURBES.

De la tangente et du plan normal d'une courbe quelconque.

251. On nomme *courbe gauche* une courbe dont tous les points ne sont pas situés dans un même plan.

Considérons une courbe plane ou gauche rapportée à trois axes de coordonnées rectilignes Ox, Oy, Oz. Soient x, y, z les coordonnées d'un point M de cette courbe, $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ les coordonnées d'un autre point M′ de la même courbe; les équations de la sécante MM′ seront

$$Y-y=\frac{\Delta y}{\Delta x}(X-x),\quad Z-z=\frac{\Delta z}{\Delta x}(X-x).$$

Les coordonnées y et z peuvent être regardées comme des fonctions données de x; alors, si le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, les rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ tendront vers les limites respectives $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, et les précédentes équations deviendront à la limite

$$(1)\qquad Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x),\quad Z-z=\frac{dz}{dx}(X-x).$$

Telles sont les équations de la tangente à la courbe au point M; on peut les comprendre dans une formule

unique, savoir

$$(2)\qquad \frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}.$$

Dans le cas des coordonnées rectangulaires, les cosinus des angles que forme, avec les directions positives des axes, l'une ou l'autre des deux directions de la tangente, sont proportionnels aux différentielles dx, dy, dz.

On nomme *plan normal* d'une courbe celui qui est perpendiculaire à la tangente, au point de contact. Toute droite menée par ce point, dans le plan normal, est dite une *normale*. D'après la remarque que nous venons de faire, l'équation du plan normal sera, dans le cas des coordonnées rectangulaires,

$$(3)\qquad (X-x)dx+(Y-y)dy+(Z-z)dz=0.$$

252. Si les coordonnées x, y, z sont données en fonction d'une variable indépendante t, de manière que l'on ait

$$(4)\qquad x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\varpi(t),$$

on aura, par la différentiation,

$$dx=\varphi'(t)dt,\quad dy=\psi'(t)dt,\quad dz=\varpi'(t)dt,$$

et, si l'on porte ces valeurs dans les équations de la tangente et du plan normal, celles-ci deviendront

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{X-\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\dfrac{Y-\psi(t)}{\psi'(t)}=\dfrac{Z-\varpi(t)}{\varpi'(t)}, \\ [X-\varphi(t)]\varphi'(t)+[Y-\psi(t)]\psi'(t)+[Z-\varpi(t)]\varpi'(t)=0. \end{cases}$$

Si la courbe est définie par deux équations

$$(6)\qquad f(x,y,z)=0,\quad F(x,y,z)=0,$$

entre les coordonnées x, y, z, on différentiera ces équa-

tions et l'on calculera deux des différentielles dx, dy, dz : enfin on substituera ces valeurs dans les équations (2) et (3). La différentiation des équations (6) donne

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,dz = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial F}{\partial z}\,dz = 0, \end{cases}$$

et au lieu d'opérer comme nous venons de le dire pour avoir les équations de la tangente, il est évident qu'on arrivera au même résultat en tirant des équations (2) les valeurs de dy et de dz, et en les portant dans les équations (7). Celles-ci sont homogènes par rapport à dx, dy, dz, et ces différentielles sont proportionnelles à $X - x$, $Y - y$, $Z - z$, d'après la formule (2); le résultat de notre élimination sera donc

$$(8)\qquad \begin{cases} (X - x)\dfrac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\dfrac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, \\[2mm] (X - x)\dfrac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\dfrac{\partial F}{\partial y} + (Z - z)\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Chacune des équations (8) représente un plan, et leur système appartient à une droite déterminée, à moins que les dérivées partielles ne cessent d'avoir des valeurs déterminées, ou qu'elles ne soient liées entre elles par les relations

$$(9)\qquad \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}.$$

Lorsque les coordonnées x, y, z du point M satisfont aux équations (9), les équations (7) ne déterminent plus les rapports de deux des différentielles dx, dy, dz à la troisième, et l'on est en présence d'un *point singulier*.

Nous nous bornons à cette simple indication que nous ne pourrions développer sans sortir des limites que nous nous sommes fixées.

Il faut remarquer que l'une des deux équations de la courbe intervient seule dans la formation de l'une ou de l'autre des équations (8) de la tangente; par conséquent le plan que représente cette équation dépend uniquement de la surface représentée par celle des équations de la courbe qui lui correspond; on va voir, dans ce qui suit, le développement de cette remarque.

Du plan tangent et de la normale à une surface courbe.

253. Considérons une surface rapportée à trois axes de coordonnées rectilignes Ox, Oy, Oz et représentée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0; \tag{1}$$

désignons par x, y, z les coordonnées de l'un quelconque de ses points M.

Traçons sur la surface une ligne quelconque qui passe par le point M; cette ligne peut être regardée comme l'intersection de la surface donnée et d'une autre surface. Soit

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

l'équation de cette deuxième surface; la tangente au point M de la courbe que nous avons tracée sera (n° **252**) représentée par les deux équations

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

$$(X - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Il résulte de là que le plan représenté par l'équation (3) contient toutes les tangentes menées par le point M aux diverses courbes que l'on peut tracer, par ce point, sur la surface donnée; il est dit le *plan tangent* de cette surface au point M.

La précédente conclusion suppose que les rapports de deux des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

à la troisième aient, au point M, des valeurs déterminées. Si le contraire a lieu, le point M est un *point singulier* de la surface; tel est, par exemple, le cas du sommet, dans les surfaces coniques.

On nomme *normale* en un point d'une surface la perpendiculaire menée au plan tangent, par le point de contact. Tout plan mené par la normale est dit un *plan normal*. L'équation (3) étant celle du plan tangent au point M de la surface (1), si les axes sont rectangulaires, les équations de la normale seront comprises dans la formule

$$(5) \qquad \frac{X - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

254. Si l'on prend x et y pour variables indépendantes, et qu'on représente par

$$(6) \qquad dz = p\,dx + q\,dy$$

la différentielle totale de z, on aura, par la différentiation de l'équation (1),

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

et, en introduisant les quantités p, q, l'équation du plan

tangent deviendra

$$(7) \qquad Z - z = p(X - x) + q(Y - y);$$

les équations de la normale seront, en même temps, dans l'hypothèse des axes rectangulaires,

$$(8) \quad (X - x) + p(Z - z) = 0, \quad (Y - y) + q(Z - z) = 0.$$

255. Si l'on demande de mener à la surface représentée par l'équation (1) un plan tangent passant par un point donné dont les coordonnées soient x_0, y_0, z_0, il suffira de trouver le point de contact; les coordonnées de ce point satisfont aux équations

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{c} f(x, y, z) = 0, \\ (x_0 - x)\dfrac{\partial f}{\partial x} + (y_0 - y)\dfrac{\partial f}{\partial y} + (z_0 - z)\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, \end{array} \right.$$

et celles-ci déterminent, sur la surface donnée, une ligne qui est le lieu du point demandé. Si l'on joint le point donné au point de contact de la surface et de l'un des plans tangents, on aura une droite dont les équations seront

$$(10) \qquad \frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0} = \frac{Z - z_0}{z - z_0};$$

l'élimination de x, y, z entre ces équations et les deux précédentes donnera l'équation d'une surface conique qui aura évidemment le même plan tangent que la surface donnée, en chacun des points de la courbe représentée par les équations (9); cette surface conique sera donc circonscrite à la surface donnée. Pour justifier notre assertion, il suffit de remarquer que le plan tangent à la surface et le plan tangent au cône contiennent l'un et l'autre la tangente de la courbe représentée par les équations (9) et la droite représentée par les équa-

tions (10); il en résulte que les deux plans tangents coïncident.

Lorsque le point (x_0, y_0, z_0) se déplace sur la droite

$$x_0 = a z_0, \quad y_0 = b z_0,$$

et qu'il s'éloigne à l'infini, la deuxième équation (9) devient à la limite

$$(11) \qquad a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

en la joignant à l'équation (1), on aura les équations de la courbe, lieu des points de contact de la surface donnée avec le cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à la droite représentée par les équations

$$X = aZ, \quad Y = bZ;$$

la génératrice du cylindre a pour équations

$$(12) \qquad X - x = a(Z - z), \quad Y - y = b(Z - z),$$

et l'on obtiendra l'équation de ce cylindre en éliminant x, y, z entre les équations (1), (11) et (12).

Emploi des coordonnées homogènes.

256. Si l'on désigne les coordonnées rectilignes d'un point par les rapports

$$\frac{x}{u}, \quad \frac{y}{u}, \quad \frac{z}{u},$$

toute équation

$$(1) \qquad f(x, y, z, u) = 0,$$

dont le premier membre est une fonction homogène de x, y, z, u, pourra être regardée comme celle d'une

surface. Par un raisonnement analogue à celui qui nous a servi au n° 171, on a l'équation suivante pour représenter le plan tangent :

$$\left(\frac{X}{U}-\frac{x}{u}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\frac{Y}{U}-\frac{y}{u}\right)\frac{\partial f}{\partial y}+\left(\frac{Z}{U}-\frac{z}{u}\right)\frac{\partial f}{\partial z}+\left(\frac{U}{U}-\frac{u}{u}\right)\frac{\partial f}{\partial u}=0.$$

Or, par la propriété des fonctions homogènes, l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+u\frac{\partial f}{\partial u}=0,$$

l'équation du plan tangent se réduit donc à

$$(2)\qquad X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}+U\frac{\partial f}{\partial u}=0.$$

Et de même, si l'on considère la courbe représentée par les deux équations homogènes

$$f(x, y, z, u)=0,\quad F(x, y, z, u)=0,$$

les équations de la tangente à cette courbe seront

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}+U\frac{\partial f}{\partial u}=0,$$

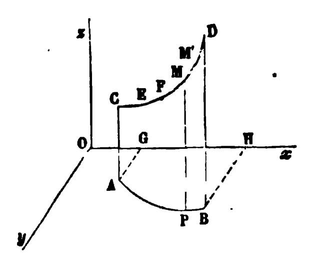
$$X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}+Z\frac{\partial F}{\partial z}+U\frac{\partial F}{\partial u}=0.$$

On voit que, si l'équation (1) est algébrique et du degré m, l'équation (2) ne sera que du degré $m-1$, par rapport aux coordonnées du point de contact. La démonstration de cette propriété exige une transformation quand on emploie les coordonnées ordinaires.

Différentielle de la longueur d'un arc de courbe quelconque.

257. Nous procéderons ici, à l'égard des courbes gauches, comme nous l'avons fait au nº **189**, en nous occupant de l'arc des courbes planes.

Soit CD un arc d'une courbe quelconque que nous rapporterons à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz.



Inscrivons dans l'arc CD une ligne polygonale CEFMM'D d'un nombre n de côtés; désignons par P le périmètre de cette ligne polygonale; par x, y, z les coordonnées d'un sommet quelconque M, par $x + \Delta x$, $y + \Delta y$; $z + \Delta z$ les coordonnées du sommet suivant M'. On aura

$$\text{MM}' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta x \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta x^2}},$$

et, comme les rapports

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

tendent vers les limites respectives

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx},$$

quand Δx tend vers zéro, on peut écrire

$$\text{MM}' = \Delta x\left(\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} + \varepsilon\right),$$

ε désignant une quantité qui s'évanouit avec Δx; on a donc, en faisant la somme de tous les côtés tels que MM',

$$(1) \qquad P = \sum \Delta x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} + \sum \varepsilon \Delta x.$$

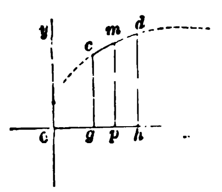
Supposons maintenant que le nombre n des côtés de notre ligne polygonale augmente indéfiniment et que chacun des côtés de cette ligne tende vers zéro. Comme la somme $\sum \Delta x$ a une valeur finie qui est la différence GH des abscisses x des extrémités de l'arc CD, on aura (n° 9)

$$(2) \qquad \lim \sum \varepsilon \Delta x = 0.$$

Ensuite, x étant prise pour variable indépendante, construisons la courbe dont l'ordonnée Y est déterminée en fonction de x par l'équation

$$Y = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}},$$

et considérons l'arc cmd de cette courbe, dont les extrémités c, d répondent aux abscisses Og, Oh respectivement égales aux abscisses OG, OH des extrémités



de l'arc CD. Si l'on désigne par S l'aire $cghd$ comprise entre l'arc cd, les ordonnées des extrémités et l'axe Ox, on aura (n° 188)

$$(3) \qquad S = \lim \sum Y \Delta x = \lim \sum \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}\, \Delta x;$$

par conséquent, la formule (1) donnera, à cause des formules (2) et (3),

$$(4) \qquad \lim P = S.$$

Ainsi, *le périmètre d'une ligne polygonale inscrite dans un arc de courbe donnée tend vers une limite déterminée lorsque tous les côtés tendent vers zéro, et cette limite est indépendante de la loi suivant laquelle décroissent les côtés du polygone.*

Comme dans le cas des courbes planes, la limite S dont nous venons d'établir l'existence sera dite la *longueur* de l'arc CD.

Désignons par s l'arc compris entre l'extrémité fixe C de l'arc CD et le point M variable sur cet arc; soit aussi Y l'ordonnée du point m de la courbe cd dont l'abscisse $op = x$ est égale à celle du point M. D'après ce que nous venons de démontrer, l'arc s est égal à l'aire $cgpm$; or cette aire a pour différentielle $Y\,dx$ ou $\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}\,dx$; donc on a

$$ds = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}\,dx$$

ou

$$(5) \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

258. Il résulte de cette formule que *la limite du rapport d'un arc de courbe infiniment petit à sa corde est égale à l'unité,* proposition déjà établie au n° 189 dans le cas des courbes planes.

Car, soit c la corde d'un arc infiniment petit MM'; si l'on désigne par s un arc de la courbe, terminé en M et compté à partir d'une origine arbitraire, on pourra re-

présenter MM′ par Δs; alors on aura

$$\frac{\Delta s}{c} = \frac{\dfrac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \dfrac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + \dfrac{\Delta z^2}{\Delta x^2}}},$$

et, par suite,

$$\lim \frac{\Delta s}{c} = \frac{\dfrac{ds}{dx}}{\sqrt{1 + \dfrac{dy^2}{dx^2} + \dfrac{dz^2}{dx^2}}} = \frac{ds}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = 1.$$

Cette propriété permet, comme dans le cas des courbes planes, de trouver facilement l'expression de la différentielle d'un arc de courbe, quand on emploie, au lieu des coordonnées rectangulaires, des variables quelconques. Par exemple, si l'on adopte des coordonnées obliques et que α, β, γ désignent les angles formés par les axes Oy et Oz, Oz et Ox, Ox et Oy, pour avoir la différentielle d'un arc s de courbe, on écrira

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim \frac{c}{\Delta x} = \lim \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta x^2} + 2\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta z}{\Delta x}\cos\alpha + 2\frac{\Delta z}{\Delta x}\cos\beta + 2\frac{\Delta y}{\Delta x}\cos\gamma}$$

ou

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\cos\alpha + 2\frac{dz}{dx}\cos\beta + 2\frac{dy}{dx}\cos\gamma},$$

et

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2\,dy\,dz\cos\alpha + 2\,dz\,dx\cos\beta + 2\,dx\,dy\cos\gamma}.$$

259. Dans le système des coordonnées polaires, chaque point de l'espace est déterminé par un rayon vecteur r et par deux angles θ, ψ; l'angle θ, compris entre zéro et 180 degrés, est celui que forme la direction du rayon r avec un axe fixe Oz; l'angle ψ peut varier de zéro à 360 degrés; il est situé dans un plan xOy

perpendiculaire à Oz, et il est compris entre une droite fixe Ox située dans le plan xy et la projection du rayon r sur le plan xOy. Si l'on désigne par x, y, z trois coordonnées rectangulaires associées aux coordonnées polaires et relatives aux axes Ox, Oy, Oz, on aura

$$x = r\sin\theta\cos\psi,\quad y = r\sin\theta\sin\psi,\quad z = r\cos\theta,$$

d'où

$$\begin{aligned}
dx &= dr\sin\theta\cos\psi + r\cos\theta\cos\psi d\theta - r\sin\theta\sin\psi d\psi,\\
dy &= dr\sin\theta\sin\psi + r\cos\theta\sin\psi d\theta + r\sin\theta\cos\psi d\psi,\\
dz &= dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta;
\end{aligned}$$

élevant au carré, ajoutant ensuite et extrayant la racine carrée du résultat, il viendra

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\psi^2}.$$

Il est facile d'obtenir directement la formule précédente. Effectivement, dans le système des coordonnées polaires, les points de l'espace sont déterminés par l'intersection de trois familles de surfaces qui sont : 1° des sphères concentriques dont r désigne généralement le rayon; 2° des cônes de révolution autour de l'axe Oz et dont l'angle générateur est θ; 3° des plans passant par l'axe Oz et dont ψ désigne l'inclinaison sur le plan fixe zOx. Cela posé, considérons le parallélépipède curviligne dont deux sommets opposés coïncident avec les extrémités de l'arc Δs d'une courbe donnée et qui est déterminé par les sphères de rayons r, $r + \Delta r$, par les cônes dont les angles sont θ, $\theta + \Delta\theta$; enfin par les plans qui répondent aux angles ψ, $\psi + \Delta\psi$. La base de ce parallélépipède sur la sphère de rayon r est un rectangle formé par quatre arcs de cercle; deux côtés opposés sont égaux à $r\Delta\theta$ et les deux autres côtés sont $r\sin\theta\Delta\psi$,

$r \sin(\theta + \Delta\theta)\Delta\psi$, enfin l'arc Δs se projette sur la sphère suivant une diagonale γ du rectangle. Les trois arcs de cercle $r\Delta\theta$, $r \sin\theta\,\Delta\psi$, γ ne diffèrent respectivement de leurs cordes que par des quantités infiniment petites par rapport à eux-mêmes; d'ailleurs les deux premières de ces cordes font entre elles un angle qui diffère infiniment peu d'un angle droit; donc on a

$$\gamma^2 = r^2 \Delta\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, \Delta\psi^2,$$

en négligeant un infiniment petit relativement à γ^2; pareillement Δs et γ diffèrent de leurs cordes par des quantités infiniment petites relativement à ces arcs, et l'angle formé par Δr avec la corde de γ diffère infiniment peu d'un angle droit; on a donc

$$\Delta s^2 = \Delta r^2 + \gamma^2,$$

en négligeant un infiniment petit par rapport à Δs^2. Les deux formules précédentes donnent

$$\frac{\Delta s^2}{\Delta\theta^2} + \varepsilon = \frac{\Delta r^2}{\Delta\theta^2} + r^2 \sin^2\theta \frac{\Delta\psi^2}{\Delta\theta^2} + r^2,$$

ε étant un infiniment petit; en passant à la limite, on a

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} + \frac{dr^2}{d\theta^2} + r^2 \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{d\theta^2} + r^2,$$

ou

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\psi^2 + r^2 d\theta^2,$$

comme nous l'avons trouvé plus haut.

Expressions des cosinus des angles que fait la tangente d'une courbe avec les directions de trois axes rectangulaires.

260. Si x, y, z désignent les coordonnées rectangulaires d'un point M d'une courbe quelconque, les cosinus des angles α, 6, γ que forme, avec les directions posi-

tives des axes, l'une ou l'autre des directions de la tangente, sont proportionnels (n° 251) aux différentielles

$$dx,\quad dy,\quad dz.$$

Or, si l'on désigne par s l'arc de la courbe compris entre une origine fixe arbitraire et le point M, la somme des carrés des trois différentielles dont nous venons de parler sera égale à ds^2, la relation

$$\frac{\cos\alpha}{dx} = \frac{\cos6}{dy} = \frac{\cos\gamma}{dz}$$

donnera donc

$$(1)\qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds},\quad \cos6 = \frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

ou

$$(2)\qquad dx = ds\cos\alpha,\quad dy = ds\cos6,\quad dz = ds\cos\gamma.$$

Dans ces formules ds représente le radical

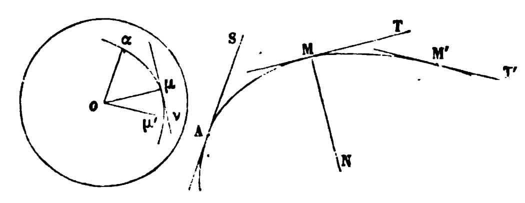
$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

et son signe est indéterminé. Si l'on prend successivement le signe $+$ et le signe $-$, on aura deux systèmes de formules qui se rapporteront respectivement aux deux directions opposées de la tangente.

Du rayon de courbure en un point d'une courbe quelconque.

261. Soit AM un arc d'une courbe quelconque ; supposons que cet arc soit parcouru par un mobile partant de A et se dirigeant vers M ; prenons alors pour direction de la tangente en chaque point la limite vers laquelle tend la direction de la droite partant de ce point et aboutissant à un point suivant infiniment voisin. Décrivons une sphère dont le rayon soit égal à l'unité de

longueur et dont le centre soit en un point quelconque O; tirons enfin des rayons parallèles aux directions des tangentes menées par les divers points de l'arc AM. Le lieu des extrémités de ces rayons sera une courbe sphérique, et la longueur de l'arc $\alpha\mu = \sigma$ de cette courbe, qui répond à l'arc $AM = s$ de la courbe donnée, sera dite la *courbure* de l'arc AM.



Si l'extrémité A de l'arc AM est fixe et que l'extrémité M soit mobile, s et σ seront des variables; la différentielle $d\sigma$ de la courbure est ce qu'on nomme l'*angle de contingence* de la courbe donnée au point M.

Dans le cas où la courbe AM est plane, $\alpha\mu$ est l'arc de grand cercle qui mesure l'angle des tangentes aux extrémités de l'arc AM. Les définitions précédentes s'accordent donc avec celles que nous avons données dans le Chapitre VII en traitant des courbes planes.

Si l'on donne à l'arc s l'accroissement infiniment petit $\Delta s = MM'$, la courbure σ prendra l'accroissement correspondant $\Delta\sigma = \mu\mu'$. Soit i l'angle formé par les directions des tangentes MT, M'T' menées aux extrémités de l'arc MM'; cet angle i sera égal à $\mu O \mu'$ ou à l'arc de grand cercle $\mu\mu'$; par conséquent on aura

$$\frac{i}{\Delta\sigma} = \frac{\text{arc de cercle } \mu\mu'}{\text{arc de courbe } \mu\mu'} = \frac{\text{arc de cercle } \mu\mu'}{\text{corde } \mu\mu'} \times \frac{\text{corde } \mu\mu'}{\text{arc de courbe } \mu\mu'},$$

d'où

$$\lim \frac{i}{\Delta\sigma} = 1.$$

Donc : *Le rapport de l'angle, formé par les tangentes aux extrémités d'un arc infiniment petit, à la courbure de cet arc, a pour limite l'unité.*

Comme dans le cas des courbes planes, nous nommerons *courbure moyenne d'un arc de courbe* le rapport de la courbure absolue à la longueur de l'arc. Pareillement, la *courbure d'une courbe en un point* M sera encore la limite de la courbure moyenne d'un arc infiniment petit ayant l'une de ses extrémités au point M ; le *rayon de courbure* sera le rayon du cercle dont la courbure est égale à la courbure de la courbe donnée au point M, et ce cercle lui-même sera dit *le cercle de courbure.*

D'après ces définitions, la courbure de la courbe AM au point M sera

$$\lim \frac{\Delta\sigma}{\Delta s}, \quad \text{ou} \quad \frac{d\sigma}{ds};$$

donc, si l'on désigne par R le rayon de courbure, on aura

$$R = \frac{ds}{d\sigma},$$

comme dans le cas des courbes planes. Les différentielles ds, $d\sigma$ seront toujours de même signe.

262. La courbe AM étant rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires, plaçons à l'origine de ces coordonnées le centre de la sphère dont nous avons fait usage. Désignons par x, y, z les coordonnées du point M et par α, β, γ les angles que fait, avec les directions positives des axes, la direction MT de la tangente en M ; les coordonnées du point μ de la courbe sphérique seront

$$\cos\alpha, \ \cos\beta, \ \cos\gamma;$$

par conséquent, la différentielle $d\sigma$ de l'arc $\sigma = \alpha\mu$ aura

pour valeur

$$(1)\qquad d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos6)^2 + (d\cos\gamma)^2}.$$

On peut obtenir d'autres expressions de $d\sigma$ qu'il est utile de connaître. A cet effet, différentions l'expression

$$\cos\alpha = \frac{1}{ds}\,dx,$$

sans fixer la variable indépendante; on aura

$$d\cos\alpha = \frac{1}{ds}\,d^2x - \frac{d^2s}{ds^2}\,dx,$$

d'où, en élevant au carré,

$$(d\cos\alpha)^2 = \frac{1}{ds^2}(d^2x)^2 - 2\,\frac{d^2s}{ds^3}\,dx\,d^2x + \frac{(d^2s)^2}{ds^4}\,dx^2;$$

si l'on remplace dans cette formule x par y, puis par z, on obtiendra les expressions de $(d\cos\beta)^2$ et $(d\cos\gamma)^2$; on aura donc pour la somme $d\sigma^2$ de ces trois carrés la valeur suivante :

$$\begin{aligned} d\sigma^2 = {} & \frac{1}{ds^2}\left[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2\right] \\ & - 2\,\frac{d^2s}{ds^3}\,(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z) \\ & + \frac{(d^2s)^2}{ds^4}\,(dx^2 + dy^2 + dz^2). \end{aligned}$$

Or l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

donne par la différentiation

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = ds\,d^2s,$$

et, après la substitution de ces valeurs, dans l'expression de $d\sigma^2$, on aura

$$(2)\qquad d\sigma = \frac{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}{ds}.$$

Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur de cette expression par ds, puis qu'on remplace ensuite, sous le radical, ds^2 et d^2s par leur valeur en fonction des coordonnées, il viendra

$$d\sigma = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]-(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)^2},$$

ce qui peut encore se mettre sous la forme

$$(3)\quad d\sigma = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

Dans ces diverses expressions de $d\sigma$, la variable indépendante n'est pas désignée; si l'on prend l'arc s pour cette variable, la différentielle d^2s sera nulle, et la formule (2) donnera cette expression fort simple

$$d\sigma = \frac{1}{ds}\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2}.$$

D'après la formule (3), le rayon de courbure R ou $\frac{ds}{d\sigma}$ a pour valeur, en fonction des seules coordonnées,

$$(4)\quad R = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2}};$$

cette formule subsiste, quelle que soit la variable indépendante.

De la normale principale en un point d'une courbe gauche.

263. Considérons une courbe gauche AM et la courbe sphérique $\alpha\mu$ correspondante, construite comme nous l'avons indiqué (*voir* la figure du n° **261**). Menons par le point μ de cette dernière courbe la tangente $\mu\nu$, et,

par le point correspondant M de la courbe donnée, MN parallèle à $\mu\nu$. La droite MN est dite la *normale principale* au point M de la courbe AM.

Soient ξ, η, ζ les angles formés avec les parties positives des axes coordonnés rectangulaires, par la direction MN ou $\mu\nu$. Les coordonnées du point μ étant $\cos\alpha$, $\cos 6$, $\cos\gamma$, on aura (n° 260)

$$(1)\qquad \cos\xi = \frac{d\cos\alpha}{d\sigma},\quad \cos\eta = \frac{d\cos 6}{d\sigma},\quad \cos\zeta = \frac{d\cos\gamma}{d\sigma},$$

ou

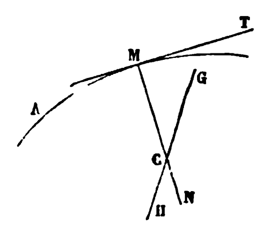
$$(2)\qquad \cos\xi = \mathrm{R}\,\frac{d\dfrac{dx}{ds}}{ds},\quad \cos\eta = \mathrm{R}\,\frac{d\dfrac{dy}{ds}}{ds},\quad \cos\zeta = \mathrm{R}\,\frac{d\dfrac{dz}{ds}}{ds}.$$

Si l'on prend l'arc s pour variable indépendante, on pourra écrire

$$(3)\qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{\mathrm{R}}\cos\xi,\quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{\mathrm{R}}\cos\eta,\quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{1}{\mathrm{R}}\cos\zeta.$$

Du centre de courbure en un point d'une courbe gauche.

264. Soient M un point d'une courbe gauche AM, MT la tangente et MN la normale principale au point M.



Construisons le cercle de courbure dans le plan NMT, de manière qu'il soit tangent en M à la ligne MT, et qu'il soit, avec les points de la courbe AM infiniment voisins

du point M, d'un même côté du plan mené par MT perpendiculairement au plan NMT. Le centre du cercle sera en un certain point C de MN ; ce point C est dit le *centre de courbure* de la courbe AM au point M, et la direction MC de la normale principale est nommée *direction du rayon de courbure*. En outre, si l'on mène, par le point C, la droite GH perpendiculaire au plan NMT, cette droite GH sera le lieu des *pôles* du cercle de courbure ; elle est dite *droite polaire* ou *axe du cercle de courbure*.

THÉORÈME. — *La droite polaire en un point donné d'une courbe est la limite vers laquelle tend l'intersection du plan normal au point donné et d'un second plan normal infiniment voisin du premier.*

En effet, soient x, y, z les coordonnées rectangulaires du point donné M de la courbe AM; α, β, γ les angles formés avec les directions positives des axes, par la direction de la tangente en M; l'équation du plan normal sera

$$(1)\quad (X - x)\cos\alpha + (Y - y)\cos\beta + (Z - z)\cos\gamma = 0;$$

nous représenterons, pour abréger, cette équation par $V = 0$. Pour avoir l'équation du plan normal en un autre point de la courbe AM, il faut remplacer, dans l'équation (1),

$$x,\quad y,\quad z,\quad \cos\alpha,\quad \cos\beta,\quad \cos\gamma$$

par

$$x + \Delta x,\quad y + \Delta y,\quad z + \Delta z,$$
$$\cos\alpha + \Delta\cos\alpha,\quad \cos\beta + \Delta\cos\beta,\quad \cos\gamma + \Delta\cos\gamma;$$

l'équation obtenue ainsi pourra être représentée par $V + \Delta V = 0$. Et, si t désigne la variable regardée comme indépendante, l'intersection de nos deux plans normaux

sera représentée par les deux équations

$$V = 0, \quad \frac{\Delta V}{\Delta t} = 0.$$

Donc la limite vers laquelle tend cette intersection, quand le second point de la courbe se rapproche indéfiniment du premier, sera la droite représentée par les deux équations

$$V = 0, \quad \frac{dV}{dt} = 0,$$

ou

$$V = 0, \quad dV = 0.$$

L'une des équations de la droite dont il s'agit est l'équation (1), et l'autre s'obtient en différentiant cette même équation dans l'hypothèse de X, Y, Z constantes. La différentiation donne

$$\begin{aligned}(X - x)\,d\cos\alpha + (Y - y)\,d\cos\beta + (Z - z)\,d\cos\gamma \\ - (dx\cos\alpha + dy\cos\beta + dz\cos\gamma) = 0,\end{aligned}$$

ou, en ayant égard aux formules des n°s 260 et 263,

$$(2) \quad (X - x)\cos\xi + (Y - y)\cos\eta + (Z - z)\cos\zeta = R.$$

Cette équation (2) représente un plan perpendiculaire à la normale principale et dont la distance au point M est égale à R, c'est-à-dire égale à MC. Il reste donc seulement à prouver, pour établir le théorème énoncé, que les points de la courbe infiniment voisins du point M sont situés entre le plan (2) et le plan parallèle mené par la tangente MT. Ce dernier plan est représenté par l'équation

$$(X - x)\cos\xi + (Y - y)\cos\eta + (Z - z)\cos\zeta = 0.$$

Remplaçons X, Y, Z par les coordonnées $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ d'un point infiniment voisin de M pris sur la courbe AM ; et choisissons ici ds pour la diffé-

rentielle constante. On aura, par la formule de Taylor,

$$\Delta x = dx + \frac{d^2x}{2} + R_3 = ds\cos\alpha + \frac{ds^2}{2R}\cos\xi + R_3,$$

R_3 étant un infiniment petit du troisième ordre; on aura aussi des expressions analogues pour Δy, Δz, et, en substituant ces valeurs dans le premier membre de l'équation du plan, on obtiendra le résultat positif

$$\frac{ds^2}{2R} + \varepsilon,$$

où ε désigne un infiniment petit du troisième ordre. D'un autre côté, on obtient aussi un résultat positif $+R$ quand on substitue à X, Y, Z, dans l'équation du même plan, les coordonnées d'un point quelconque du plan (2); donc les points de ce dernier plan et les points de la courbe infiniment voisins de M sont bien d'un même côté du plan mené par MT perpendiculaire à la normale principale.

D'après cela, si l'on désigne par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de courbure C, on aura

$$(3)\qquad x_1 - x = R\cos\xi,\quad y_1 - y = R\cos\eta,\quad z_1 - z = R\cos\zeta,$$

et, en remplaçant $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ par leurs valeurs (n° 263)

$$x_1 - x = R^2\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad y_1 - y = R^2\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},\quad z_1 - z = R^2\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Expressions des cosinus des angles qui déterminent la direction de l'axe du cercle de courbure.

265. Désignons par λ, μ, ν les angles que forme avec les parties positives des axes coordonnés l'une ou l'autre des deux directions de l'axe du cercle de courbure. Cet

axe est perpendiculaire à la tangente et à la normale principale; d'ailleurs ces deux dernières lignes sont rectangulaires; donc on aura entre les cosinus des neuf angles

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\quad \xi,\ \eta,\ \zeta;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu$$

les relations connues, savoir :

$$(1)\quad \begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \\ \cos^2\xi + \cos^2\eta + \cos^2\zeta = 1, \\ \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\xi + \cos^2\lambda = 1, \\ \cos^2\beta + \cos^2\eta + \cos^2\mu = 1, \\ \cos^2\gamma + \cos^2\zeta + \cos^2\nu = 1; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \cos\alpha\cos\xi + \cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\zeta = 0, \\ \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0, \\ \cos\xi\cos\lambda + \cos\eta\cos\mu + \cos\zeta\cos\nu = 0; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \cos\alpha\cos\beta + \cos\xi\cos\eta + \cos\lambda\cos\mu = 0, \\ \cos\alpha\cos\gamma + \cos\xi\cos\zeta + \cos\lambda\cos\nu = 0, \\ \cos\beta\cos\gamma + \cos\eta\cos\zeta + \cos\mu\cos\nu = 0; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \pm(\cos\beta\cos\zeta - \cos\gamma\cos\eta), \\ \cos\mu = \pm(\cos\gamma\cos\xi - \cos\alpha\cos\zeta), \\ \cos\nu = \pm(\cos\alpha\cos\eta - \cos\beta\cos\xi), \\ \cos\xi = \pm(\cos\mu\cos\gamma - \cos\nu\cos\beta), \\ \cos\eta = \pm(\cos\nu\cos\alpha - \cos\lambda\cos\gamma), \\ \cos\zeta = \pm(\cos\lambda\cos\beta - \cos\mu\cos\alpha), \\ \cos\alpha = \pm(\cos\eta\cos\nu - \cos\zeta\cos\mu), \\ \cos\beta = \pm(\cos\zeta\cos\lambda - \cos\xi\cos\nu), \\ \cos\gamma = \pm(\cos\xi\cos\mu - \cos\eta\cos\lambda); \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \quad\cos\lambda(\cos\beta\cos\zeta - \cos\gamma\cos\eta) \\ + \cos\mu(\cos\gamma\cos\xi - \cos\alpha\cos\zeta) \\ + \cos\nu(\cos\alpha\cos\eta - \cos\beta\cos\xi) = \pm 1; \end{cases}$$

les signes supérieurs ou inférieurs doivent être pris ensemble dans les dix formules (5) et (6); les uns se rapportent à l'une des directions de l'axe du cercle de courbure, les autres à la direction opposée.

Nous avons donné dans les numéros précédents les expressions des cosinus des angles α, 6, γ et ξ, η, ζ en fonction des coordonnées rectangulaires; les trois premières des équations (5) permettent d'exprimer de la même manière les cosinus des angles λ, μ, ν. Ainsi la première de ces équations (5) peut s'écrire comme il suit, sans fixer la variable indépendante :

$$\cos\lambda = \pm \frac{1}{ds\,d\sigma}\left(dy\,d\frac{dz}{ds} - dz\,d\frac{dy}{ds}\right) = \pm R\,\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3};$$

on déduit de là, par des permutations de lettres, les valeurs de $\cos\mu$ et $\cos\nu$, et l'on a ce système de formules

$$(7)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \pm R\,\dfrac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3}, \\ \cos\mu = \pm R\,\dfrac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{ds^3}, \\ \cos\nu = \pm R\,\dfrac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3}. \end{cases}$$

Expression de la différence entre un arc de courbe et sa corde.

266. On obtient une expression très-remarquable de la différence entre un arc de courbe et sa corde, en introduisant les rayons de courbure aux extrémités de l'arc. Je présenterai ici ce calcul, comme une application intéressante des résultats auxquels nous venons de parvenir.

Soient s un arc de courbe compté à partir d'une origine quelconque, et x, y, z les coordonnées rectangulaires

de l'extrémité de s. Je prendrai cet arc pour variable indépendante; alors on aura, en désignant par R le rayon de courbure, à son extrémité,

$$(1)\qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

$$(2)\qquad \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2=\frac{1}{R^2}.$$

On a, par la différentiation de l'équation (1),

$$(3)\qquad \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}=0;$$

en différentiant de nouveau et ayant égard à l'équation (2), il vient

$$(4)\qquad \frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3}+\frac{dy}{ds}\frac{d^3y}{ds^3}+\frac{dz}{ds}\frac{d^3z}{ds^3}=-\frac{1}{R^2};$$

puis la différentiation de l'équation (2) donne

$$(5)\qquad \frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3}+\frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^3y}{ds^3}+\frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^3z}{ds^3}=\frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds};$$

enfin celle de l'équation (4) donne, en ayant égard à la formule (5),

$$(6)\qquad \frac{dx}{ds}\frac{d^4x}{ds^4}+\frac{dy}{ds}\frac{d^4y}{ds^4}+\frac{dz}{ds}\frac{d^4z}{ds^4}=-\frac{3}{2}\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}.$$

Cela posé, soient Δx, Δy, Δz les accroissements que prennent x, y, z, quand s croît de Δs, on aura, par la formule de Taylor,

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\frac{dx}{ds}+\frac{d^2x}{ds^2}\frac{\Delta s}{2}+\frac{d^3x}{ds^3}\frac{\Delta s^2}{6}+\frac{d^4x}{ds^4}\frac{\Delta s^3}{24}+\varepsilon_4,$$

ε_4 désignant un infiniment petit du quatrième ordre. En

élevant cette formule au carré, on a ensuite

$$\frac{\Delta x^2}{\Delta s^2} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\Delta s + \left[\frac{1}{3}\frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{1}{4}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2\right]\Delta s^2$$
$$+ \left(\frac{1}{12}\frac{dx}{ds}\frac{d^4x}{ds^4} + \frac{1}{6}\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3}\right)\Delta s^3 + \varepsilon_4,$$

ε_4 étant encore ici un infiniment petit du quatrième ordre. De cette valeur de $\frac{\Delta x^2}{\Delta s^2}$ on déduira celles de $\frac{\Delta y^2}{\Delta s^2}$ et $\frac{\Delta z^2}{\Delta s^2}$, en écrivant y et z au lieu de x, et, si l'on ajoute les trois expressions, on aura, en faisant usage des formules précédentes,

$$\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta s^2} = 1 - \frac{1}{R^2}\frac{\Delta s^2}{12} - \frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}\frac{\Delta s^3}{24} + \varepsilon^4,$$

puis, en extrayant la racine carrée par la formule du binôme,

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta s} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\Delta s^2}{12} + \frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}\frac{\Delta s^3}{24} - \varepsilon_4\right) + \ldots,$$

ou

$$(7) \qquad \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta s} = 1 - \frac{1}{R^2}\frac{\Delta s^2}{24} - \frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}\frac{\Delta s^3}{48} + \varepsilon_4,$$

ε_4 désignant toujours un infiniment petit du quatrième ordre. Cette dernière formule peut être écrite d'une autre manière. R est le rayon de courbure à l'extrémité de l'arc s, origine de l'arc Δs; désignons par R_1 le rayon de courbure à l'extrémité de l'arc Δs. La différence des quantités

$$\frac{\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R^2}}{\Delta s} \quad \text{et} \quad \frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}$$

étant infiniment petite, si l'on substitue la première à la

seconde, dans la formule (7), on ne fera que modifier l'infiniment petit du quatrième ordre ε_4; on a donc

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta s} = 1 - \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\Delta s^2}{48} + \varepsilon_4;$$

multipliant enfin par Δs, il viendra

$$(8) \qquad \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta s - \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\Delta s^3}{48} + \varepsilon_5,$$

ε_5 étant un infiniment petit du cinquième ordre.

La différence entre un arc infiniment petit Δs et sa corde a donc pour valeur

$$\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\Delta s^3}{48},$$

à un infiniment petit près du cinquième ordre, R et R_1 étant les rayons de courbure aux extrémités de Δs.

Appliquons cette formule (8) au cas d'un arc de cercle de rayon 1. Soit $\Delta s = 2a$, on aura

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z} = 2\sin a,$$

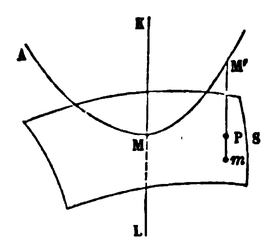
et la formule (8) donnera

$$\sin a = a - \frac{a^3}{6}$$

De l'ordre du contact d'une courbe et d'une surface. — Des surfaces osculatrices en un point d'une courbe donnée.

267. Soient S une surface quelconque, AM une courbe passant par un point M de S et KL la normale en M à cette surface. Prenons sur la courbe un point M′ infiniment voisin de M, et dont la distance à la normale KL sera choisie pour infiniment petit principal; menons enfin la droite M′m parallèle à KL et qui rencontre en m la sur-

face S. Cela posé, si la longueur $M'm$ est un infiniment petit de l'ordre $k+1$, je dirai qu'il y a au point M un contact d'ordre k entre la courbe et la surface.



Pour que l'ordre du contact ne soit pas nul, ou, ce qui revient au même, pour qu'il y ait effectivement contact entre la courbe et la surface, il faut et il suffit que la tangente de la courbe au point M soit située dans le plan tangent de la surface. Effectivement, désignons par x, y, z les coordonnées du point M relativement à trois axes rectangulaires; par $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$ celles du point M′, et par $x+\Delta' x, y+\Delta' y, z+\Delta' z$ celles du point m; représentons, en outre, par γ l'angle que forme, avec l'axe des z, la tangente en M à la courbe, et par $dz = p\,dx + q\,dy$ la valeur de dz qui convient à la surface S; on aura pour cette surface

$$\Delta' z = p\Delta' x + q\Delta' y + \varepsilon',$$

et, pour la courbe,

$$\Delta z = dz + \varepsilon = ds\cos\gamma + \varepsilon,$$

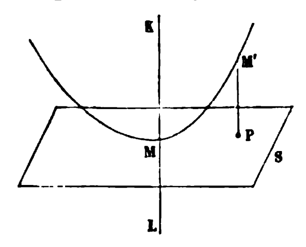
ε et ε' étant des infiniment petits d'ordre supérieur au premier. Maintenant, si l'on fait coïncider l'axe des z avec la normale KL, on aura $p=0$, $q=0$; par conséquent $\Delta' z$ ou Pm sera un infiniment petit d'ordre supérieur au premier. D'ailleurs $M'm$ est la somme ou la différence des lignes $M'P = \Delta z$ et Pm; donc, pour que l'ordre infinitésimal de $M'm$ soit supérieur à 1, il est nécessaire et suf-

fisant que $\cos\gamma$ soit nul, ou que la tangente en M à la courbe soit dans le plan tangent de la surface.

Étant donnée une courbe C, si l'on considère une famille de surfaces représentée par une équation où figurent $n+1$ paramètres arbitraires, on pourra en général déterminer ces $n+1$ paramètres de manière à établir, en un point donné de la courbe C, un contact de l'ordre n. La surface déterminée ainsi est dite *osculatrice de la courbe* C, au point donné, relativement aux surfaces de la même famille qui passent par le même point. Nous allons traiter, dans ce qui va suivre, du *plan osculateur* et de la *sphère osculatrice*.

Du plan osculateur en un point d'une courbe donnée.

268. Soient x, y, z les coordonnées d'un point M d'une courbe rapportée à trois axes rectangulaires. Comme l'équation du plan ne renferme que trois paramètres arbitraires, *le plan osculateur de la courbe au point donné est celui qui a un contact du deuxième ordre en ce point avec la courbe*. Il est à peine nécessaire d'ajouter que, pour certains points particuliers, l'ordre du contact peut être supérieur à 2.



Soit

$$aX + bY + cZ - p = 0$$

l'équation d'un plan S; nous désignons par a, b, c les

cosinus des angles que fait avec les axes la direction de la perpendiculaire p abaissée de l'origine des coordonnées sur ce plan. Soit δ la distance M'P du point $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ de la courbe au plan S; on aura

$$\pm\delta = a(x+\Delta x) + b(y+\Delta y) + c(z+\Delta z) - p,$$

et il nous faut déterminer les constantes a, b, c, p, parmi lesquelles trois seulement sont arbitraires, de manière que δ soit un infiniment petit du troisième ordre; l'infiniment petit principal est la distance de M' à la normale KL du plan, ou tout autre infiniment petit dont le rapport à cette distance a une limite finie. On a, par la formule de Taylor, quelle que soit la variable indépendante,

$$\Delta x = dx + \frac{d^2 x}{1.2} + R_3,$$

$$\Delta y = dy + \frac{d^2 y}{1.2} + R'_3,$$

$$\Delta z = dz + \frac{d^2 z}{1.2} + R''_3,$$

R_3, R'_3, R''_3 étant des infiniment petits du troisième ordre. En substituant ces valeurs dans l'expression de $\pm\delta$, on a

$$\pm\delta = (ax+by+cz-p) + (adx+bdy+cdz) + \frac{1}{2}(ad^2x+bd^2y+cd^2z) + (aR_3+bR'_3+cR''_3),$$

et pour que cette expression soit un infiniment petit du troisième ordre au moins, il faut et il suffit que l'on ait

$$(1)\quad \begin{cases} ax+by+cz-p=0, \\ adx+bdy+cdz=0, \\ ad^2x+bd^2y+cd^2z=0. \end{cases}$$

La première de ces équations exprime que le plan S

passe par le point M; elle détermine p quand a, b, c sont connus; les deux autres équations donnent

$$(2)\qquad \frac{a}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \frac{b}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} = \frac{c}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Les dénominateurs des rapports qui figurent dans la formule (2) sont proportionnels aux cosinus des angles λ, μ, ν, formés avec les directions positives des axes, par l'une ou l'autre des directions de l'axe du cercle de courbure (nº **265**); on a donc

$$a = \cos\lambda,\quad b = \cos\mu,\quad c = \cos\nu;$$

et par conséquent *le plan osculateur n'est autre chose que le plan du cercle de courbure,* c'est-à-dire le plan mené par la tangente et par la normale principale. Dans le cas d'une courbe plane, le plan osculateur est celui de la courbe.

269. Si les constantes a, b, c, p satisfont seulement aux deux premières conditions (1), le plan S aura au point M, avec la courbe, un contact du premier ordre; il sera simplement tangent, et il restera dans son équation un paramètre indéterminé. Nous indiquerons ici deux propositions qu'il convient de remarquer :

Théorème I. — *Le plan osculateur en un point* M *d'une courbe est la limite vers laquelle tend le plan mené par la tangente en* M *et par un point* M′ *de la courbe infiniment voisin de* M.

Tant que le plan dont il s'agit n'a pas atteint sa limite, il a en M avec la courbe un simple contact du premier ordre. Son équation est

$$(1)\qquad a(X-x) + b(Y-y) + c(Z-z) = 0,$$

et l'on a, par hypothèse,

$$(2)\qquad a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0;$$

en outre, comme le plan passe par le point M′ de la courbe pour lequel les coordonnées sont $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, on a aussi

$$a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z = 0. \tag{3}$$

Désignons par t la variable indépendante, on aura, par la formule de Taylor,

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{1.2} + A\Delta t^3,$$

$$\Delta y = \frac{dy}{dt}\Delta t + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{1.2} + B\Delta t^3,$$

$$\Delta z = \frac{dz}{dt}\Delta t + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{1.2} + C\Delta t^3,$$

en désignant par $A\Delta t^3$, ... les restes des trois séries. Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (3), qu'on réduise ensuite par le moyen de l'équation (2) et qu'on divise par Δt^2, il viendra

$$\frac{1}{2}\left(a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{d^2z}{dt^2}\right) + (aA + bB + cC)\Delta t = 0;$$

passant à la limite, Δt devient nul, et l'on a

$$ad^2x + bd^2y + cd^2z = 0. \tag{4}$$

Les valeurs de a, b, c tirées des formules (2) et (4) sont bien celles qui conviennent au plan osculateur.

Remarque. — Les coordonnées x, y, z ont été supposées rectangulaires au n° 268; mais on voit, par le théorème précédent, que l'équation du plan osculateur conserve la même forme quand les coordonnées sont obliques.

270. Théorème II. — *Le plan osculateur en un point* M *d'une courbe est la limite vers laquelle tend le*

plan mené par le point M *et par deux autres points* M′, M″ *de la courbe, infiniment voisins de* M.

Appelons t la variable à l'aide de laquelle sont exprimées les trois coordonnées x, y, z des points de la courbe, et soit

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \pi(t).$$

Représentons par t, $t + h_1$, $t + h_2$ les valeurs de la variable qui correspondent aux points M, M′, M″. Dans l'équation générale du plan

$$a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} + c\mathrm{Z} - p = 0,$$

remplaçons X, Y, Z respectivement par $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\pi(t)$, et désignons par $\mathrm{F}(t)$ la fonction

$$a\varphi(t) + b\psi(t) + c\pi(t) - p.$$

Les relations qui expriment que le plan comprend les trois points M, M′, M″ sont

$$\mathrm{F}(t) = 0, \quad \mathrm{F}(t + h_1) = 0, \quad \mathrm{F}(t + h_2) = 0.$$

Si l'on fait tendre vers zéro, d'une façon arbitraire, les deux quantités h_1 et h_2, le système (n° 58) se réduit à

$$\mathrm{F}(t) = 0, \quad \mathrm{F}'(t) = 0, \quad \mathrm{F}''(t) = 0.$$

On a donc, pour déterminer les rapports des quantités a, b, c, p, à l'une d'entre elles, les relations

$$ax + by + cz - p = 0,$$
$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$
$$a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z = 0.$$

Les deux dernières donnent les rapports des quantités a, b, c qui conviennent au plan osculateur.

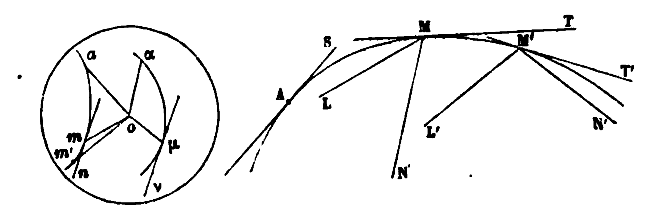
REMARQUE. — On définit quelquefois le plan osculateur par l'une des deux propriétés qui font l'objet des précédents théorèmes. La normale principale peut alors être définie en disant qu'elle est l'intersection du plan normal et du plan osculateur.

De la torsion ou seconde courbure des courbes gauches.

271. Les déviations successives de la tangente dans le passage d'un point d'un arc de courbe à un autre nous ont conduit à la notion de la courbure. Mais, dans le cas des courbes gauches, il y a lieu de considérer une *affection* d'une autre nature à laquelle on a donné le nom de *torsion* ou de *seconde courbure,* et de là vient la dénomination de *courbe à double courbure,* appliquée aux courbes gauches. La torsion d'un arc de courbe résulte des déviations successives du plan osculateur ou de l'axe de ce plan, dans le passage d'une extrémité de l'arc à l'autre extrémité; pour la définir avec précision, nous emploierons les considérations qui nous ont déjà servi quand nous nous sommes occupé de la première courbure.

Soient AM un arc de courbe, MT la direction de la tangente en M, MN celle de la normale principale et ML l'une ou l'autre des deux directions de la perpendiculaire au plan osculateur; la direction de la tangente en chaque point de l'arc AM est déterminée ici comme on l'a indiqué au n° 261. Construisons une sphère ayant pour centre un point quelconque O et dont le rayon soit égal à l'unité de longueur. Si l'on mène des rayons parallèles aux directions des tangentes aux divers points de l'arc AM, les extrémités de ces rayons détermineront sur la sphère (n° 261) la courbe $\alpha\mu$, dont la longueur mesure la première

courbure de l'arc AM. Cela posé, menons par le centre O de la même sphère des diamètres parallèles aux axes des plans osculateurs relatifs aux divers points de l'arc AM:



les extrémités de ces diamètres détermineront sur la sphère deux arcs de courbe symétriques. Soit *am* l'un de ces arcs, la longueur τ de l'arc *am* sera dite la *torsion* ou la *seconde courbure* de l'arc AM.

Si l'extrémité A de l'arc AM $= s$ est fixe et que l'extrémité M soit mobile, la courbure τ sera une variable; sa différentielle $d\tau$ est dite l'*angle de torsion au point* M, ou l'*angle de contingence relatif à la seconde courbure*.

Soient MM' $= \Delta s$ un accroissement infiniment petit de l'arc s, j l'angle que fait l'axe du plan osculateur en M' avec l'axe du plan osculateur en M; les extrémités des rayons Om, Om' parallèles à ces deux axes détermineront sur la courbe sphérique l'arc $\Delta\tau$ qui, par notre définition, est la torsion de l'arc MM'. Par le raisonnement déjà employé (n° 261) à l'occasion de la première courbure, on prouvera que l'on a

$$\lim \frac{j}{\Delta\tau} = 1,$$

c'est-à-dire que le rapport de l'angle des plans osculateurs relatifs aux extrémités d'un arc infiniment petit, à la torsion de cet arc, a pour limite l'unité.

La *torsion moyenne* d'un arc de courbe est le rapport

de la torsion absolue à la longueur de l'arc. Enfin nous appellerons *torsion* ou *seconde courbure en un point d'une courbe, la limite vers laquelle tend la torsion moyenne d'un arc infiniment petit de la courbe, ayant ce point pour origine.*

D'après cela, la torsion au point M de la courbe AM aura pour valeur

$$\lim \frac{\Delta \tau}{\Delta s} \quad \text{ou} \quad \frac{d\tau}{ds}.$$

On peut encore assimiler cette seconde courbure à la courbure d'un cercle, et l'on nomme *rayon de torsion* ou *rayon de seconde courbure* le rayon du cercle dont la courbure en chaque point est égale à la torsion de la courbe donnée au point que l'on considère. Si l'on désigne par T le rayon de la seconde courbure, on aura

$$T = \frac{ds}{d\tau};$$

la différentielle $d\tau$ a le même signe que ds.

272. La courbe AM étant rapportée à trois axes rectangulaires, supposons, comme au n° 262, que l'on ait placé le centre O de la sphère à l'origine des coordonnées. Désignons toujours par x, y, z les coordonnées du point M et par λ, μ, ν les angles que fait avec les parties positives des axes l'une des directions ML ou Om de l'axe du plan osculateur; les coordonnées du point m seront

$$\cos\lambda, \quad \cos\mu, \quad \cos\nu,$$

et, par conséquent, la différentielle $d\tau$ de l'arc τ aura pour valeur

$$d\tau = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2};$$

les cosinus des angles λ, μ, ν sont connus (n° 265) en

fonction des coordonnées : on peut donc calculer $d\tau$, et par suite le rayon T, en fonction des mêmes coordonnées; nous ferons ce calcul plus loin.

273. J'établirai ici une proposition que j'ai fait connaître depuis longtemps et qui a une grande importance dans l'étude des propriétés des courbes ; cette proposition consiste simplement en ce que les tangentes aux points correspondants m et μ des deux courbes sphériques que nous avons introduites sont parallèles.

On a, en conservant les notations dont nous avons fait usage dans les numéros précédents,

$$(1)\quad \begin{cases} \cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos 6\, d\cos 6 + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0, \\ \cos\lambda\, d\cos\alpha + \cos\mu\, d\cos 6 + \cos\nu\, d\cos\gamma = 0; \end{cases}$$

effectivement, $d\cos\alpha$, $d\cos 6$, $d\cos\gamma$ étant proportionnelles à $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$, les formules (1) expriment la perpendicularité de la normale principale sur la tangente et sur l'axe du plan osculateur. En ayant égard à la seconde des équations (1) et en différentiant les suivantes :

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos 6\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

on trouve

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\alpha\, d\cos\lambda + \cos 6\, d\cos\mu + \cos\gamma\, d\cos\nu = 0, \\ \cos\lambda\, d\cos\lambda + \cos\mu\, d\cos\mu + \cos\nu\, d\cos\nu = 0. \end{cases}$$

Or les coefficients des différentielles

$$(3)\qquad d\cos\alpha,\quad d\cos 6,\quad a\cos\gamma,$$

dans les équations (1), sont exactement les mêmes que les coefficients des différentielles

$$(4)\qquad d\cos\lambda,\quad d\cos\mu,\quad d\cos\nu$$

dans les équations (2); donc les différentielles (4) sont proportionnelles aux différentielles (3), et l'on a

$$(5) \qquad \frac{d\cos\lambda}{d\cos\alpha} = \frac{d\cos\mu}{d\cos6} = \frac{d\cos\nu}{d\cos\gamma}.$$

Ces formules démontrent la propriété énoncée : effectivement les cosinus des angles que fait avec les axes la tangente en m à la seconde courbe sphérique sont proportionnels aux différentielles des coordonnées, c'est-à-dire aux différentielles (4); de même, les cosinus des angles que fait la tangente en μ à la première courbe sphérique sont proportionnels aux différentielles (3); il en résulte que ces deux tangentes sont bien parallèles.

Mais, en prenant les points a et α pour origines des arcs des courbes sphériques, les directions des tangentes aux points correspondants peuvent coïncider ou être opposées. La courbe sphérique relative aux axes des plans osculateurs se compose, d'après notre construction, de deux parties symétriques qui répondent aux directions opposées de ces axes; donc, selon que l'on prendra l'une ou l'autre de ces parties pour la courbe am, les directions des tangentes en m et μ seront de même sens ou opposées. Je supposerai que l'on ait construit la courbe am de manière que les tangentes en μ et m aient la même direction, direction qui est celle de la normale principale au point M de la courbe donnée. Alors, à cause des équations (2) du n° 260, la précédente formule donnera

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} d\cos\lambda &= \cos\xi\, d\tau, \\ d\cos\mu &= \cos\eta\, d\tau, \\ d\cos\nu &= \cos\zeta\, d\tau. \end{aligned} \right.$$

Résumé et complément des formules principales relatives à la théorie des courbes gauches.

274. Je crois devoir résumer ici les résultats divers que nous avons obtenus dans les numéros précédents.

Rappelons que nous désignons par

x, y, z les coordonnées rectangulaires;

α, β, γ les angles formés par la direction de la tangente avec les directions positives des axes;

ξ, η, ζ les angles formés par la direction de la normale principale avec les mêmes directions;

λ, μ, ν les angles formés également avec les mêmes directions par la direction de l'axe du plan osculateur;

$ds, d\sigma, d\tau$ la différentielle de l'arc de la courbe donnée, l'angle de contingence et l'angle de torsion.

Alors on a

$$(1)\quad dx = ds\cos\alpha,\quad dy = ds\cos\beta,\quad dz = ds\cos\gamma,$$

$$(2)\quad d\cos\alpha = \cos\xi\, d\sigma,\quad d\cos\beta = \cos\eta\, d\sigma,\quad d\cos\gamma = \cos\zeta\, d\sigma,$$

$$(3)\quad d\cos\lambda = \cos\xi\, d\tau,\quad d\cos\mu = \cos\eta\, d\tau,\quad d\cos\nu = \cos\zeta\, d\tau,$$

pourvu que la direction de l'axe du plan osculateur soit déterminée, comme on l'a indiqué au numéro précédent.

Cela posé, si l'on différentie l'équation

$$\cos^2\xi = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\lambda,$$

on aura

$$\cos\xi\, d\cos\xi = -\cos\alpha\, d\cos\alpha - \cos\lambda\, d\cos\lambda,$$

ce qui devient, en faisant usage des formules (2) et (3),

$$d\cos\xi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau;$$

cette formule en donne deux autres, par les permutations

des lettres, et l'on a ce nouveau système de formules :

$$(4)\quad \begin{cases} d\cos\xi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau, \\ d\cos\eta = -\cos\beta\, d\sigma - \cos\mu\, d\tau, \\ d\cos\zeta = -\cos\gamma\, d\sigma - \cos\nu\, d\tau. \end{cases}$$

Les formules (2), (3), (4) permettent d'exprimer, dans les recherches relatives à la théorie des courbes, les différentielles des neuf cosinus, $\cos\alpha$, ..., en fonction de ces mêmes cosinus et des différentielles des trois arcs s, σ, τ. On a d'ailleurs

$$(5)\qquad ds = R\, d\sigma = T\, d\tau.$$

On tire des formules (4)

$$\sqrt{(d\cos\xi)^2 + (d\cos\eta)^2 + (d\cos\zeta)^2} = \sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2};$$

cette expression est celle de la différentielle de l'arc d'une troisième courbe sphérique que l'on formerait en menant par le centre d'une sphère des rayons parallèles aux directions des normales principales de la courbe proposée.

275. Pour donner un exemple des avantages que procure l'emploi des formules précédentes, je les appliquerai à la recherche du rayon de torsion T en fonction des coordonnées rectangulaires. A cet effet, reprenons les équations (7) du n° 265, savoir

$$\frac{ds^3}{R}\cos\lambda = \pm(dy\, d^2z - dz\, d^2y),$$

$$\frac{ds^3}{R}\cos\mu = \pm(dz\, d^2x - dx\, d^2z),$$

$$\frac{ds^3}{R}\cos\nu = \pm(dx\, d^2y - dy\, d^2x).$$

Différentiant ces équations et ayant égard aux for-

mules (3) et (5) du numéro précédent, on trouvera

$$\left(d\frac{ds^3}{R}\right)\cos\lambda+\frac{ds^4}{RT}\cos\xi=\pm(dy\,d^3z-dz\,d^3y),$$

$$\left(d\frac{ds^3}{R}\right)\cos\mu+\frac{ds^4}{RT}\cos\eta=\pm(dz\,d^3x-dx\,d^3z),$$

$$\left(d\frac{ds^3}{R}\right)\cos\nu+\frac{ds^4}{RT}\cos\zeta=\pm(dx\,d^3y-dy\,d^3x);$$

et si l'on ajoute ces trois équations, après les avoir multipliées respectivement par les trois suivantes :

$$\frac{ds^2}{R}\cos\xi=d^2x-\frac{d^2s}{ds}dx,$$

$$\frac{ds^2}{R}\cos\eta=d^2y-\frac{d^2s}{ds}dy,$$

$$\frac{ds^2}{R}\cos\zeta=d^2z-\frac{d^2s}{ds}dz,$$

il viendra

$$\frac{ds^6}{R^2T}=\pm[(dy\,d^3z-dz\,d^3y)d^2x+(dz\,d^3x-dx\,d^3z)d^2y+(dx\,d^3y-dy\,d^3x)d^2z],$$

ou, en remplaçant $\frac{ds^6}{R^2}$ par la valeur tirée de la formule (4) du n° 262,

$$T=\pm\frac{(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2}{(dy\,d^3z-dz\,d^3y)d^2x+(dz\,d^3x-dx\,d^3z)d^2y+(dx\,d^3y-dy\,d^3x)d^2z}.$$

La valeur de T étant essentiellement positive, la formule précédente fait connaître le signe qu'il faut substituer dans les formules (5), (6) et (7) du n° 265, au signe ambigu $\pm$; on doit se rappeler que la direction de l'axe du plan osculateur a été fixée par la convention adoptée au n° 273. Il convient de remarquer que le rayon de torsion s'exprime par une fonction rationnelle des différentielles des coordonnées.

276. Si l'on égale à zéro le dénominateur de l'expression de T, on obtiendra la condition qui exprime qu'une courbe est plane. Lorsqu'on prend x pour variable indépendante et que l'on fait en conséquence $d^2x = 0$, $d^3x = 0$, la condition dont il s'agit est simplement

$$d^3y\,d^2z - d^2y\,d^3z = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$d\frac{d^2z}{d^2y} = 0;$$

elle exprime donc que le rapport $\frac{d^2z}{d^2y}$ est égal à une constante B; ainsi l'on a

$$d^2z = \mathrm{B}d^2y,$$

en sorte que dz et $\mathrm{B}dy$ ne diffèrent que par une constante $\mathrm{A}dx$; on a donc

$$dz = \mathrm{A}dx + \mathrm{B}dy,$$

et l'on en conclut

$$z = \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C},$$

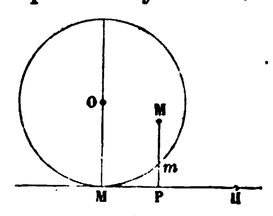
C étant une nouvelle constante. Cette dernière équation représente un plan dans lequel la courbe est située.

De la sphère osculatrice en un point d'une courbe donnée.

277. L'équation de la sphère renferme quatre paramètres arbitraires, les coordonnées du centre et le rayon; on peut donc en chaque point d'une courbe établir un contact du troisième ordre entre cette courbe et une sphère; celle-ci sera la sphère osculatrice.

Soit M un point de la courbe donnée; faisons passer par ce point une sphère dont nous représenterons le

centre par O. Prenons sur la courbe un point M′ infiniment voisin du point M, et considérons le plan qui passe par le point M′ et par le rayon MO; ce plan coupe la



sphère suivant un grand cercle, et le plan tangent en M à la sphère suivant la ligne MH tangente au grand cercle. Abaissons M′P perpendiculaire sur MH, et désignons par m le point où cette perpendiculaire rencontre la circonférence du cercle. D'après la définition générale du n° 267, la sphère O sera osculatrice au point M de la courbe donnée, si la ligne $M'm$ est un infiniment petit du quatrième ordre, l'infiniment petit principal étant la ligne MP ou tout autre infiniment petit dont le rapport à MP tend vers une limite finie. On a

$$M'm = M'P - mP,$$

et $mP = \frac{\overline{Mm}^2}{2MO}$ est un infiniment petit du deuxième ordre; donc il faut déjà que M′P soit elle-même un infiniment petit du deuxième ordre, ce qui s'accorde avec ce qu'on a dit au n° 267. Désignons par r le rayon de la sphère, par s l'arc de la courbe terminé en M et compté à partir d'une origine quelconque, par Δs l'arc MM′ de la même courbe. On aura

$$mP = \frac{\overline{Mm}^2}{2r} = \frac{\overline{MP}^2 + \overline{mP}^2}{2r} = \frac{\overline{MM'}^2 - \overline{M'P}^2 + \overline{mP}^2}{2r},$$

ou

$$mP = \frac{\Delta s^2}{2r} - \frac{(\Delta s - MM')(\Delta s + MM') + \overline{M'P}^2 - \overline{mP}^2}{2r};$$

or la différence entre l'arc Δs et sa corde est un infiniment petit du troisième ordre (n° 266); $\overline{\text{M}'\text{P}}^2$ et $\overline{m\text{P}}^2$ sont des infiniment petits du quatrième ordre; donc la différence des deux quantités

$$m\text{P}, \quad \frac{\Delta s^2}{2r}$$

est un infiniment petit du quatrième ordre. Par conséquent, la sphère osculatrice est telle que

$$\text{M}'\text{P} - \frac{\Delta s^2}{2r}$$

est un infiniment petit du quatrième ordre.

Désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de la sphère osculatrice relatives à trois axes rectangulaires; par x, y, z les coordonnées du point M; par $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ celles du point M'. L'équation de la sphère sera

$$(\text{X} - x_0)^2 + (\text{Y} - y_0)^2 + (\text{Z} - z_0)^2 = r^2,$$

et celle du plan tangent en M,

$$(x - x_0)(\text{X} - x) + (y - y_0)(\text{Y} - y) + (z - z_0)(\text{Z} - z) = 0.$$

Le centre de la sphère et le point M' étant situés d'un même côté du plan tangent, on obtiendra des résultats de même signe si l'on remplace X, Y, X, dans l'équation précédente, par les coordonnées de l'un et de l'autre point. Or la substitution des coordonnées du centre donne le résultat $-r^2$; donc la substitution des coordonnées du point M' donnera un résultat négatif. D'après cela, la distance M'P du point M' au plan tangent sera

$$\text{M}'\text{P} = \frac{(x_0 - x)\Delta x + (y_0 - y)\Delta y + (z_0 - z)\Delta z}{r},$$

et, par conséquent, on aura

$$\mathrm{M'P}\times r-\frac{1}{2}\Delta s^2$$
$$=(x_0-x)\Delta x+(y_0-y)\Delta y+(z_0-z)\Delta z-\frac{1}{2}\Delta s^2;$$

telle est l'expression de la quantité qui doit se réduire à un infiniment petit du quatrième ordre.

On a

$$\Delta x=dx+\frac{d^2x}{2}+\frac{d^3x}{6}+\ldots,$$

$$\Delta y=dy+\frac{d^2y}{2}+\frac{d^3y}{6}+\ldots,$$

$$\Delta z=dz+\frac{d^2z}{2}+\frac{d^3z}{6}+\ldots,$$

et

$$\Delta s=ds+\frac{d^2s}{2}+\ldots,$$

d'où, par l'élévation au carré,

$$\Delta s^2=ds^2+ds\,d^2s+\ldots.$$

Pour remplir l'objet demandé, il suffit de substituer ces valeurs de Δx, Δy, Δz, Δs^2 dans l'expression précédente et d'égaler ensuite à zéro la somme des termes infiniment petits du premier ordre, la somme des termes du deuxième ordre, et enfin celle des termes du troisième ordre. On obtient ainsi les équations

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&(x_0-x)dx+(y_0-y)dy+(z_0-z)dz=0,\\&(x_0-x)d^2x+(y_0-y)d^2y+(z_0-z)d^2z-ds^2=0,\\&(x_0-x)d^3x+(y_0-y)d^3y+(z_0-z)d^3z-3ds\,d^2s=0.\end{aligned}\right.$$

qui détermineront les coordonnées x_0, y_0, z_0 du centre de la sphère osculatrice. Le rayon r sera donné ensuite

par l'équation

$$(2)\qquad (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2 - r^2 = 0.$$

Il faut remarquer que la première des équations (1) s'obtient en différentiant l'équation (2), dans l'hypothèse de x_0, y_0, z_0, r constantes; pareillement, on obtient les deux dernières équations (1) en différentiant deux fois de suite la première, dans la même hypothèse.

278. D'après cette remarque, les équations (1) et (2) peuvent être représentées, pour abréger, par

$$V = 0,\quad dV = 0,\quad d^2V = 0,\quad d^3V = 0.$$

Si les trois premières sont seules satisfaites, la sphère n'aura avec la courbe qu'un contact du deuxième ordre, et il restera une constante arbitraire dans son équation. Si les deux premières équations sont seules satisfaites, la sphère n'aura qu'un simple contact du premier ordre avec la courbe, mais il restera deux arbitraires dans son équation; enfin, quand la première condition est seule satisfaite, il n'y a plus de contact au point commun, et il reste trois arbitraires dans l'équation de la sphère.

Dans chacun de ces cas, on peut assujettir la sphère à passer par un point $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ de la courbe, ce qui donne la condition

$$V + \Delta V = 0.$$

Or, si les $i - 1$ premières des quatre équations précédentes sont satisfaites, et que t désigne la variable indépendante, la nouvelle condition pourra se mettre sous la forme

$$\frac{1}{1.2\ldots i}\left(\frac{d^iV}{dt^i} + \varepsilon\right) = 0,$$

ε s'annulant avec Δt; elle se réduira donc à

$$\frac{d^i V}{dt^i} = 0,$$

ou à

$$d^i V = 0,$$

lorsque le point M′ viendra se confondre avec le point M. Donc : *Toute sphère qui a un contact d'ordre i en* M *avec une courbe peut être regardée comme la limite d'une sphère qui a un contact d'ordre i — 1 et qui passe par un point* M′ *de la courbe infiniment voisin du point* M.

279. Nous présenterons encore ici deux propositions qu'il convient de remarquer.

Théorème I. — *La sphère osculatrice en un point* M *d'une courbe est la limite de la sphère qui passe par le point* M *et par trois autres points de la courbe infiniment voisins de* M.

Supposons encore la courbe définie par les formules

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \pi(t),$$

et soient t, $t + h_1$, $t + h_2$, $t + h_3$ les valeurs de t qui répondent aux quatre points considérés. En posant

$$V = F(t) = [\varphi(t) - a]^2 + [\psi(t) - b]^2 + [\pi(t) - c]^2 - r^2,$$

on obtient, comme au n° 270, pour déterminer les paramètres de la sphère limite, les relations

$$V = 0, \quad dV = 0, \quad d^2 V = 0, \quad d^3 V = 0,$$

conditions qui sont bien celles de la sphère osculatrice.

280. Théorème II. — *Le centre de la sphère osculatrice en un point* M *d'une courbe est la limite vers la-*

quelle tend le point d'intersection de l'axe du cercle de courbure en M, *et du plan normal en un autre point de la courbe infiniment voisin de* M. *Ce centre est aussi la limite du point d'intersection du plan normal en* M *et des plans normaux en deux autres points de la courbe infiniment voisins de* M.

En effet, quand on considère x_0, y_0, z_0 comme des coordonnées variables dans les équations (1) du n° 277, la première équation est précisément celle du plan normal en M, et le système des deux premières appartient (n° 264) à l'axe du cercle de courbure. Représentons par

$$V = 0, \quad dV = 0$$

ces deux équations, le plan normal en un point infiniment voisin de M aura pour équation

$$V + \Delta V = 0,$$

et, en la joignant aux deux précédentes, on aura le système qui convient au point d'intersection. Mais, par le raisonnement déjà employé plus haut, cette dernière équation se réduit, au moyen des précédentes, à

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \varepsilon = 0,$$

t étant la seule variable indépendante, et ε une quantité qui s'annule avec Δt; en outre, elle devient $\frac{d^2V}{dt^2} = 0$, ou

$$d^2V = 0,$$

quand Δt s'annule. De là résulte la première partie du théorème énoncé.

La deuxième partie se démontre par un raisonnement analogue à celui du numéro précédent.

Expression des coordonnées du centre et du rayon de la sphère osculatrice en un point d'une courbe.

281. D'après l'analyse précédente, les coordonnées du centre de la sphère osculatrice sont déterminées par l'équation du plan normal jointe à celle qu'on en déduit par deux différentiations relatives à la variable indépendante dont les coordonnées de la courbe sont fonction. Or, avant d'exécuter l'une de ces différentiations, on peut multiplier l'équation qu'il s'agit de différentier par une fonction quelconque des coordonnées; car, si l'on représente cette équation par $V=0$, et qu'on la remplace par $MV=0$, on obtiendra, par la différentiation, $VdM+MdV=0$, qui sera équivalente à $dV=0$, à cause de $V=0$. Cela posé, en conservant les notations dont nous avons constamment fait usage, et dont nous avons présenté le résumé au n° **274**, l'équation du plan normal sera

$$(1)\quad (x_0-x)\cos\alpha+(y_0-y)\cos\beta+(z_0-z)\cos\gamma=0;$$

en différentiant dans l'hypothèse de x_0, y_0, z_0 constantes et employant pour cet objet les formules (2) et (5) du n° **274**, on obtient

$$(2)\quad (x_0-x)\cos\xi+(y_0-y)\cos\eta+(z_0-z)\cos\zeta=R;$$

différentiant de nouveau, au moyen des formules (3) et (5) du n° **274**, il vient, en ayant égard à l'équation (1),

$$(3)\quad (x_0-x)\cos\lambda+(y_0-y)\cos\mu+(z_0-z)\cos\nu=-\frac{TdR}{ds}.$$

Ajoutons maintenant les équations (1), (2), (3) après les avoir multipliées respectivement d'abord par $\cos\alpha$, $\cos\xi$, $\cos\lambda$, puis par $\cos\beta$, $\cos\eta$, $\cos\mu$, puis enfin par

$\cos\gamma$, $\cos\zeta$, $\cos\nu$, il viendra

$$(4)\qquad \begin{cases} x_0 - x = \mathrm{R}\cos\xi - \dfrac{\mathrm{T}d\mathrm{R}}{ds}\cos\lambda, \\ y_0 - y = \mathrm{R}\cos\eta - \dfrac{\mathrm{T}d\mathrm{R}}{ds}\cos\mu, \\ z_0 - z = \mathrm{R}\cos\zeta - \dfrac{\mathrm{T}d\mathrm{R}}{ds}\cos\nu; \end{cases}$$

en outre, si l'on ajoute les équations (4) après les avoir élevées au carré, on aura cette expression simple du carré r^2 du rayon de la sphère osculatrice,

$$(5)\qquad r^2 = \mathrm{R}^2 + \frac{\mathrm{T}^2 d\mathrm{R}^2}{ds^2}.$$

Le centre de la sphère osculatrice est situé sur l'axe du cercle de courbure et l'équation (3) montre que sa distance au plan de ce cercle est égale à la valeur absolue de $\dfrac{\mathrm{T}d\mathrm{R}}{ds}$, ou, d'après l'équation (5), égale à $\sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2}$; il résulte de là que :

Le cercle de courbure en un point d'une courbe est l'intersection du plan osculateur et de la sphère osculatrice relatifs au même point.

282. Cette propriété entraîne une conséquence que nous devons signaler. La sphère osculatrice en un point M d'une courbe C est la limite des sphères qui passent par M et par trois autres points M′, M″, M‴ de la courbe C infiniment voisins de M ; pareillement le plan osculateur est la limite des plans qui passent par M et par les deux points M′, M″. Il résulte de là que le cercle de courbure est la limite des cercles qui passent par le point M et par deux autres points M′, M″ infiniment voisins de M. Cela posé, projetons la courbe et le cercle sur un plan quelconque, et soient m, m', m'' les projections de M, M′,

M″; le cercle se projettera suivant une ellipse qui aura un contact du deuxième ordre en m avec la projection de la courbe C, car elle est la limite d'une ellipse passant par M et par deux points infiniment voisins de m (n° 215). En particulier, si l'on projette la courbe C sur le plan du cercle de courbure en M, la projection obtenue aura ce même cercle pour cercle de courbure en M.

Des surfaces enveloppes.

283. Désignons par $f(x, y, z, \alpha)$ une fonction des quatre variables x, y, z, α dont la valeur soit bien déterminée quand on a fixé les valeurs de x, y, z, α. Si l'on suppose que x, y, z représentent des coordonnées quelconques et que α soit un paramètre variable, l'équation

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \tag{1}$$

représentera une famille de surfaces; à chaque valeur de α répondra une surface individuelle.

Si, après avoir donné à α une valeur déterminée, on attribue à ce paramètre la nouvelle valeur $\alpha + \Delta\alpha$, on aura une deuxième surface ayant pour équation

$$f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = 0,$$

et qui coupera la première suivant une certaine courbe. On peut prendre pour la deuxième équation de cette courbe

$$\frac{f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, z, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0,$$

au lieu de la précédente.

Maintenant, si l'on fait tendre $\Delta\alpha$ vers zéro, l'intersection dont nous venons de parler tendra vers une cer-

taine limite, pour laquelle on aura, outre l'équation (1),

$$(2) \qquad \frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0,$$

et il y aura sur chacune des surfaces représentées par l'équation (1) une courbe déterminée de cette manière. Le lieu géométrique de toutes ces courbes est une surface dont l'équation s'obtiendra par l'élimination de α entre les équations (1) et (2); cette surface est dite l'*enveloppe* des surfaces que représente l'équation (1), et celles-ci, à leur tour, ont reçu le nom d'*enveloppées*. La courbe variable représentée par les équations (1) et (2), et dont l'enveloppe est le lieu géométrique, a été nommée par Monge la *caractéristique de l'enveloppe*.

284. Théorème I. — *L'enveloppe est tangente à l'enveloppée en chaque point de la caractéristique.*

En effet, soit M (x, y, z) l'un des points communs à l'enveloppe et à l'enveloppée; pour établir que l'enveloppée et l'enveloppe ont le même plan tangent en M, il suffit de montrer que, si l'on prend x et y pour variables indépendantes, la valeur de la différentielle totale dz sera la même au point M, pour l'enveloppée et pour l'enveloppe.

L'enveloppée étant représentée par l'équation (1), où α a une valeur déterminée, la valeur de dz relative à cette surface est donnée par l'équation

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$

que l'on obtient en différentiant l'équation (1) dans l'hypothèse de α constante.

L'équation (1) peut aussi être prise pour celle de l'enveloppe, pourvu qu'on regarde α non plus comme une

constante, mais comme une fonction de x, y, z définie par l'équation (2). Alors, pour avoir la valeur de dz qui convient à l'enveloppe, il faut différentier l'équation (1), dans l'hypothèse de α variable. Il vient ainsi

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \alpha}d\alpha = 0;$$

mais la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ étant nulle, d'après l'équation (2), notre équation (4) se réduit à l'équation (3), la valeur de α devant être ici tirée de l'équation (2). Comme cette valeur, pour les points communs à l'enveloppe et à l'enveloppée, est précisément celle qui convient à l'enveloppée, l'équation (3) donnera pour l'une et l'autre surface la même valeur de dz, ce qui démontre le théorème énoncé.

285. Considérons trois enveloppées répondant aux valeurs

$$\alpha, \quad \alpha + h_1, \quad \alpha + h_2$$

du paramètre. Ces trois enveloppées se couperont en certains points m, m', ..., dont les coordonnées sont déterminées par les équations

$$(5) \quad f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad f(x, y, z, \alpha + h_1) = 0, \quad f(x, y, z, \alpha + h_2) = 0.$$

Lorsque h_1 et h_2 tendent vers zéro, ce système se réduit à

$$(6) \quad f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Il est facile de voir que ces points M, M', ... sont aussi les limites vers lesquelles tendent les points d'intersection de la caractéristique

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

et de l'enveloppée

$$f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = 0,$$

lorsque l'on fait tendre $\Delta\alpha$ vers zéro.

Il y a ainsi sur chaque caractéristique un ou plusieurs points, tels que M, M', ..., et le lieu de tous ces points forme une courbe dont les équations s'obtiendront par l'élimination de α entre les équations (6); Monge lui a donné le nom d'*arête de rebroussement* de l'enveloppe.

286. Théorème II. — *Toutes les caractéristiques sont tangentes à l'arête de rebroussement.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de prouver qu'en chaque point commun à la caractéristique et à l'arête de rebroussement, les valeurs de dy et de dz sont les mêmes pour les deux courbes, x étant prise pour variable indépendante.

Représentons, pour abréger, par f', f'' les dérivées $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$, les équations de la caractéristique seront

$$(7) \qquad f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad f'(x, y, z, \alpha) = 0,$$

et, en différentiant dans l'hypothèse de α constante, on aura les équations

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy + \dfrac{\partial f}{\partial z} dz = 0, \\ \dfrac{\partial f'}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f'}{\partial y} dy + \dfrac{\partial f'}{\partial z} dz = 0, \end{cases}$$

qui détermineront dy et dz en chaque point de la courbe.

Les équations (7) peuvent aussi être prises pour celles de l'arête de rebroussement, à la condition que α y désigne

la fonction de x, y, z déterminée par l'équation

$$(9) \qquad f''(x, y, z, \alpha) = 0.$$

Mais, en différentiant les équations (7) dans cette nouvelle hypothèse, on obtient toujours les mêmes équations (8), car les termes $\frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha$, $\frac{\partial f'}{\partial \alpha} d\alpha$ ou $f' d\alpha$, $f'' d\alpha$, qu'introduit la variation de α, sont nuls par les conditions de la question. Comme α a d'ailleurs la même valeur pour les points communs à la caractéristique et à l'arête, les équations (8) donneront, pour les deux courbes, les mêmes valeurs de dy et de dz; en conséquence ces courbes sont tangentes.

Des surfaces développables.

287. Nous appellerons *surface développable* toute surface qui est l'enveloppe d'un plan mobile.

Soient a, b, c, p des fonctions données d'un paramètre variable et a', b', c', p' leurs dérivées; l'équation d'un plan mobile sera

$$(1) \qquad ax + by + cz - p = 0;$$

et celle de l'enveloppe s'obtiendra par l'élimination du paramètre entre l'équation (1) et la suivante :

$$(2) \qquad a'x + b'y + c'z - p' = 0;$$

enfin les équations (1) et (2) appartiendront à la caractéristique. Cette caractéristique est ici une ligne droite et, comme elle est tangente à l'arête de rebroussement de l'enveloppe, on voit qu'*une surface développable est le lieu géométrique des tangentes d'une courbe gauche.*

L'arête de rebroussement de la surface développable

peut se réduire à un point; cela arrivera si les fonctions a, b, c, p du paramètre sont liées entre elles par l'équation

$$(3) \qquad ax_0 + by_0 + cz_0 - p = 0,$$

x_0, y_0, z_0 étant des constantes. Dans ce cas, les équations (1) et (2) se réduisent à

$$(4) \qquad \begin{cases} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \\ a'(x - x_0) + b'(y - y_0) + c'(z - z_0) = 0, \end{cases}$$

et la surface développable est un cône qui a pour sommet le point dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0. Enfin, si l'on pose

$$x_0 = mz_0, \quad y = nz_0,$$

m, n étant des constantes, et que l'on fasse tendre z_0 vers l'infini, l'équation (3) se réduira à

$$(5) \qquad am + bn + c = 0.$$

Si les fonctions a, b, c satisfont à cette relation (5), les équations (1) et (3) pourront être mises sous la forme

$$(6) \qquad \begin{cases} a(x - mz) + b(y - nz) - p = 0, \\ a'(x - mz) + b'(y - nz) - p' = 0, \end{cases}$$

et elles appartiendront alors à une surface cylindrique. Ici l'arête de rebroussement se réduit à un point situé à l'infini.

288. Le plan mobile enveloppé par une surface développable n'est autre chose que le plan osculateur de l'arête de rebroussement de la surface. En effet, désignons par x, y, z les coordonnées d'un point de l'arête, et soient a'', b'', c'', p'' les deuxièmes dérivées des fonc-

tions a, b, c, p; on aura

$$ax + by + cz - p = 0,$$
$$a'x + b'y + c'z - p' = 0,$$
$$a''x + b''y + c''z - p'' = 0;$$

toutes les quantités qui figurent dans ces formules sont fonctions du même paramètre; nous prendrons ce paramètre pour variable indépendante. Si l'on différentie les deux premières des équations précédentes, il viendra, en ayant égard aux deux dernières,

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$
$$a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz = 0;$$

différentiant la première de ces deux-ci et ayant égard à l'autre, on aura

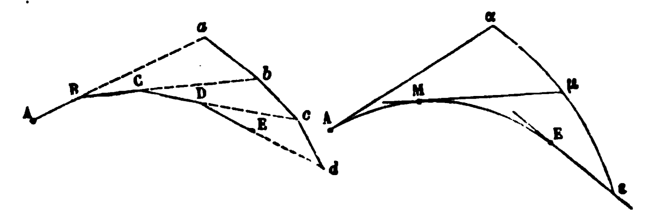
$$ad^2x + bd^2y + cd^2z = 0.$$

Les équations

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0, \quad ad^2x + bd^2y + cd^2z = 0$$

montrent (n° 268) que a, b, c sont proportionnels aux cosinus des angles que fait avec les axes coordonnés l'axe du plan osculateur de l'arête; donc ce plan osculateur est précisément notre plan mobile.

289. Considérons une surface développable quelconque; soient A un point de l'arête de rebroussement



à partir duquel nous compterons l'arc s de cette arête, et E le point qui répond à $s = S$. Inscrivons dans l'arc S une

ligne polygonale ABCDE d'un nombre n de côtés dont les directions soient respectivement AB, BC, CD, ...; désignant ensuite généralement par s l'arc de l'arête compris entre le point A et l'un des sommets du polygone, prolongeons le côté qui se termine à ce sommet d'une quantité $t = \varphi(s)$, φ désignant une fonction quelconque; joignons enfin chacun des points a, b, c, ..., qui terminent les lignes t au point suivant. On formera ainsi une surface polyédrale composée de $n - 1$ faces triangulaires et qui sera limitée par la ligne polygonale inscrite dans l'arc S, les côtés extrêmes de cette ligne, et la ligne brisée *abcd*. Or, en faisant tourner les faces triangulaires D*dc*, C*cb*, ..., autour des côtés respectifs D*c*, C*b*, ..., on pourra placer tous ces triangles dans le plan ABC du premier d'entre eux; on obtiendra ainsi ce qu'on appelle le *développement* de la surface polyédrale. Dans ce développement les longueurs t et les côtés des deux lignes brisées ABCDE, *abcde* demeurent invariables.

Supposons maintenant que le nombre n des côtés de la ligne polygonale ABCDE augmente indéfiniment, et que chacun de ses côtés tende vers zéro, la ligne ABCDE aura pour limite l'arc S, et notre surface polyédrale tendra à se confondre de plus en plus avec la portion de la surface développable limitée par l'arc AE de l'arête, les tangentes Aα, Eε aux extrémités de cet arc, et un certain arc de courbe $\alpha\varepsilon$, défini par l'équation

$$t = \varphi(s),$$

s étant l'arc AM de l'arête et t la portion Mμ de la tangente en M qui est comprise entre le point de contact et l'arc de courbe $\alpha\varepsilon$.

D'un autre côté le développement de la surface polyédrale tendra aussi vers une certaine limite, et nous dirons que cette limite est le *développement* de la portion de

surface développable que nous considérons. En particulier, la courbe plane qui est la limite de la ligne polygonale *abcd* après le développement de la surface polyédrale sera le *développement* ou la *transformée* de la ligne courbe $\alpha\varepsilon$ tracée sur la surface développable. Il est évident que le plan ABC a pour limite le plan osculateur de l'arête au point A, lequel est tangent (n° 288) à la surface développable ; aussi le développement dont nous venons de parler est-il exécuté sur le plan tangent en A à la surface. Remarquons enfin que l'équation $t = \varphi(s)$, qui a lieu, par hypothèse, pour la courbe $\alpha\varepsilon$, subsiste après le développement.

De la surface polaire. — Lieu des centres des sphères osculatrices aux divers points d'une courbe donnée.

290. On a vu au n° 264 que si l'on représente par

$$V = 0$$

l'équation du plan normal en un point (x, y, z) d'une courbe, la droite polaire ou axe du cercle de courbure a pour équations

$$V = 0, \quad dV = 0,$$

la caractéristique d étant relative aux coordonnées rectangulaires x, y, z et aux quantités qui dépendent de la même variable indépendante ; nous avons démontré enfin au n° 278 que les coordonnées du centre de la sphère osculatrice, pour le point (x, y, z), sont données par les trois équations

$$V = 0, \quad dV = 0, \quad d^2V = 0.$$

Il résulte de là que le plan normal d'une courbe a pour enveloppe une surface développable dont la caractéristique ou la génératrice est la droite polaire, et dont l'arête

de rebroussement est la courbe lieu des centres des sphères osculatrices. Cette surface développable a reçu le nom de *surface polaire*.

Il est évident que la courbe lieu des centres de courbure est située sur la surface polaire.

291. Nous avons donné au n° **281** les expressions des coordonnées x_0, y_0, z_0 du centre de la sphère osculatrice; ces expressions sont

$$(1)\qquad \begin{cases} x_0 = x + R\cos\xi - \dfrac{T\,dR}{ds}\cos\lambda, \\ y_0 = y + R\cos\eta - \dfrac{T\,dR}{ds}\cos\mu, \\ z_0 = z + R\cos\zeta - \dfrac{T\,dR}{ds}\cos\nu, \end{cases}$$

et l'on a, en outre

$$(2)\qquad r^2 = R^2 + \frac{T^2 dR^2}{ds^2},$$

notre notation étant ici la même qu'au n° **274**.

Si l'on différentie les équations (1) et (2) en faisant usage des formules du n° **274**, et que l'on fasse

$$(3)\qquad ds_0 = \pm\left(\frac{R\,ds}{T} + d\,\frac{T\,dR}{ds}\right);$$

en attribuant à ds_0 le signe de ds, il viendra

$$(4)\qquad dx_0 = \mp ds_0\cos\lambda,\quad dy_0 = \mp ds_0\cos\mu,\quad dz_0 = \mp ds_0\cos\nu$$

et

$$(5)\qquad r\,dr = \mp\frac{T\,dR}{ds}\,ds_0.$$

Les formules (4) montrent : 1° que ds_0 est la différentielle de l'arc de l'arête de rebroussement de la surface polaire ; 2° que la tangente à cette arête est précisément

la droite polaire, ce qui est une confirmation des résultats obtenus précédemment.

Mais on voit aussi que ds_0 peut être nulle, et alors l'arête doit se réduire à un point. Les formules (4) et (5) montrent que x_0, y_0, z_0, r sont des constantes; la même sphère est osculatrice en chacun des points de la courbe donnée; celle-ci est donc située sur cette sphère.

On peut conclure de là que, si une courbe est sphérique et située sur une sphère de rayon a, on a, par l'équation (2),

$$(6) \qquad R^2 + \frac{T^2 dR^2}{ds^2} = a^2.$$

Mais si cette dernière équation a lieu pour une courbe, a étant une constante, il ne s'ensuit pas nécessairement que la courbe soit sphérique; en effet, il résulte seulement de l'équation (6) que l'on a

$$r = a \quad \text{d'où} \quad dr = 0,$$

et, d'après la formule (5), cette circonstance a lieu, non-seulement quand ds_0 est nulle, mais aussi quand dR est nulle. Lorsque $dR = 0$, on a $ds_0 = -\frac{R\,ds}{T}$ et ds_0 ne peut être nulle que dans le seul cas où T est infini; quand $T = \infty$, la courbe est plane, et, comme son rayon de courbure est constant, elle est une circonférence de cercle (n° 194).

Si l'on a $dR = 0$ ou $R =$ const. et que T ne soit pas infini, l'équation (2) donne $r = R$ et les formules (1) comparées aux formules (3) du n° 264 montrent que le centre de la sphère osculatrice se confond avec le centre de courbure. On a donc ce théorème:

Si le rayon de courbure d'une courbe gauche est constant, la courbe lieu des centres de courbure se confond

avec l'arête de rebroussement de la surface développable, enveloppe des plans normaux.

292. Désignons par $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \xi_0, \eta_0, \zeta_0; \lambda_0, \mu_0, \nu_0, R_0, T_0$ les quantités analogues $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, et relatives à l'arête de rebroussement. Faisons en outre abstraction du cas des courbes planes, c'est-à-dire du cas où T est infini.

Les formules (4) pourront s'écrire comme il suit :

$$(7)\qquad \cos\alpha_0 = \mp\cos\lambda, \quad \cos\beta_0 = \mp\cos\mu, \quad \cos\gamma_0 = \pm\cos\nu;$$

la différentiation de ces équations donne

$$\frac{ds_0}{R_0}\cos\xi_0 = \mp\frac{ds}{T}\cos\xi,$$

$$\frac{ds_0}{R_0}\cos\eta_0 = \mp\frac{ds}{T}\cos\eta,$$

$$\frac{ds_0}{R_0}\cos\zeta_0 = \mp\frac{ds}{T}\cos\zeta,$$

d'où

$$(8)\qquad \frac{ds_0}{R_0} = \frac{ds}{T} \quad \text{ou} \quad d\sigma_0 = d\tau,$$

et

$$(9)\qquad \cos\xi_0 = \mp\cos\xi, \quad \cos\eta_0 = \mp\cos\eta, \quad \cos\zeta_0 = \mp\cos\zeta.$$

La différentiation des équations (9) donne ensuite, en ayant égard aux formules (7) et (8),

$$\frac{ds_0}{T_0}\cos\lambda_0 = \mp\frac{ds}{R}\cos\alpha,$$

$$\frac{ds_0}{T_0}\cos\mu_0 = \mp\frac{ds}{R}\cos\beta,$$

$$\frac{ds_0}{T_0}\cos\nu_0 = \mp\frac{ds}{R}\cos\gamma,$$

d'où

$$(10)\qquad \frac{ds_0}{T_0} = \frac{ds}{R} \quad \text{ou} \quad d\tau_0 = d\sigma.$$

et

$$(11) \quad \cos\lambda_0 = \mp \cos\alpha, \quad \cos\mu_0 = \mp \cos 6, \quad \cos\nu_0 = \mp \cos\gamma.$$

En comparant ainsi la courbe proposée à l'arête de rebroussement de la surface polaire, on voit que pour les deux courbes la direction de la normale principale est la même, et que la tangente de chacune d'elles est parallèle à l'axe du plan osculateur de l'autre. En même temps les formules (8) et (9) expriment que la première courbure de l'une quelconque des deux courbes est égale à la seconde courbure de l'autre. Il est évident que le signe ambigu $\mp$ peut être remplacé à volonté par $+$ ou par $-$ dans chacune des formules (7), (9), (11). Remarquons enfin que la formule (3) devient, en vertu de ce qui précède,

$$(12) \qquad \pm ds_0 = R\,d\sigma_0 + d\frac{dR}{d\sigma_0}.$$

293. Considérons dans le plan des xy la droite mobile représentée par l'équation

$$(13) \qquad X \sin\sigma_0 - Y \cos\sigma_0 = R;$$

l'enveloppe de cette droite sera déterminée par l'équation précédente, jointe à celle qu'on en déduit par la différentiation relative à la variable indépendante dont dépendent σ_0 et R, savoir

$$(14) \qquad X \cos\sigma_0 + Y \sin\sigma_0 = \frac{dR}{d\sigma_0};$$

on tirera des équations (13) et (14) les valeurs suivantes des coordonnées de l'enveloppe :

$$(15) \qquad \begin{cases} X = +R\sin\sigma_0 + \dfrac{dR}{d\sigma_0}\cos\sigma_0, \\ Y = -R\cos\sigma_0 + \dfrac{dR}{d\sigma_0}\sin\sigma_0, \end{cases}$$

et, en différentiant,

$$dX = \left(R\,d\sigma_0 + d\,\frac{dR}{d\sigma_0}\right)\cos\sigma_0,$$

$$dY = \left(R\,d\sigma_0 + d\,\frac{dR}{d\sigma_0}\right)\sin\sigma_0,$$

ce qui devient, à cause de la formule (12),

$$(16) \qquad dX = \pm\, ds_0 \cos\sigma_0, \quad dY = \pm\, ds_0 \sin\sigma_0.$$

Ces formules expriment que, pour notre enveloppe plane, l'arc et la courbure sont les mêmes que pour l'arête de rebroussement de la surface polaire.

Si l'on introduit, dans les équations (1), qui déterminent le centre de la sphère osculatrice, les coordonnées X, Y, avec les angles ξ_0, η_0, ζ_0, λ_0, μ_0, ν_0 qui se rapportent à l'arête, il viendra

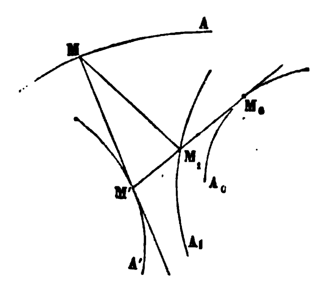
$$(17) \quad \begin{cases} x_0 = x \pm X(\cos\sigma_0 \cos\alpha_0 - \sin\sigma_0 \cos\xi_0) \pm Y(\sin\sigma_0 \cos\alpha_0 + \cos\sigma_0 \cos\xi_0), \\ y_0 = y \pm X(\cos\sigma_0 \cos\beta_0 - \sin\sigma_0 \cos\eta_0) \pm Y(\sin\sigma_0 \cos\beta_0 + \cos\sigma_0 \cos\eta_0), \\ z_0 = z \pm X(\cos\sigma_0 \cos\gamma_0 - \sin\sigma_0 \cos\zeta_0) \pm Y(\sin\sigma_0 \cos\gamma_0 + \cos\alpha_0 \cos\zeta_0); \end{cases}$$

le signe ambigu $\pm$ doit être partout remplacé par + ou par —; on passe au surplus d'un signe à l'autre en ajoutant une demi-circonférence à l'arc σ_0.

Les formules (17) donnent immédiatement la solution du problème qui a pour objet de trouver une courbe quand on connaît le lieu des centres des sphères osculatrices. Dans ce cas, toutes les quantités affectées de l'indice zéro et qui se rapportent à l'arête sont des fonctions connues d'une même variable indépendante; les équations (16) déterminent X et Y par leurs différentielles; après quoi les équations (17) donnent les coordonnées x, y, z de la courbe demandée.

Théorie générale des développées et des développantes.

294. Lorsqu'une courbe AM plane ou gauche peut être décrite par l'une des extrémités d'un fil, d'abord enroulé sur une seconde courbe A'M' à laquelle il est fixé par son autre extrémité, et que l'on déroule de manière qu'il soit toujours tendu, la courbe A'M' est dite une *développee*



de la courbe AM. Réciproquement la courbe AM est une *développante* de la courbe A'M'.

295. Recherche des développées d'une courbe donnée. —Nous désignerons (n° 274) par x, y, z les coordonnées de la courbe donnée relativement à trois axes rectangulaires; par α, β, γ; ξ, η, ζ; λ, μ, ν les angles formés, avec les directions des axes, par la tangente, la normale principale et l'axe du plan osculateur; par s l'arc de la courbe, par R et T les rayons de courbure et de torsion. Les quantités analogues relatives à la seconde courbe seront représentées par les mêmes lettres accentuées.

Cela posé, si l'on fait

$$(1) \qquad u = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2},$$

les conditions pour que A'M' soit une développée de AM

seront

(2) $x' - x = u\cos\alpha', \quad y' - y = u\cos\beta', \quad z' - z = u\cos\gamma',$

avec

(3) $$ds' = du.$$

Si l'on différentie la première équation (2) en faisant usage des formules du n° **274**, il viendra

$$ds'\cos\alpha' - ds\cos\alpha = \frac{u\,ds'}{R'}\cos\xi' + du\cos\alpha',$$

ou, à cause de l'équation (3),

$$ds\cos\alpha = -\frac{u\,du}{R'}\cos\xi';$$

on aura de même

$$ds\cos\beta = -\frac{u\,du}{R'}\cos\eta',$$

$$ds\cos\gamma = -\frac{u\,du}{R'}\cos\zeta'.$$

Ces trois formules donnent

(4) $$ds = \frac{u\,du}{R'},$$

puis

(5) $\cos\xi' = -\cos\alpha, \quad \cos\eta' = -\cos\beta, \quad \cos\zeta' = -\cos\gamma,$

ce qui exprime que la normale principale au point M' de la développée est parallèle à la tangente au point correspondant M de la développante. Les tangentes aux deux courbes sont donc perpendiculaires, et l'on a

(6) $$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.$$

Différentiant cette équation par le moyen des formules

du n° 274 déjà rappelées, on trouve

$$\frac{ds}{R}(\cos\xi\cos\alpha' + \cos\eta\cos6' + \cos\zeta\cos\gamma')$$
$$+ \frac{ds'}{R'}(\cos\alpha\cos\xi' + \cos6\cos\eta' + \cos\gamma\cos\zeta') = 0,$$

ou, à cause des formules (3), (4), (5),

$$(7) \qquad \cos\xi\cos\alpha' + \cos\eta\cos6' + \cos\zeta\cos\gamma' = \frac{R}{u}.$$

On a aussi

$$(8) \quad \cos\lambda\cos\alpha' + \cos\mu\cos6' + \cos\nu\cos\gamma' = \sqrt{1 - \frac{R^2}{u^2}},$$

car on trouve une identité en ajoutant les équations (6), (7), (8), après les avoir élevées au carré. Si l'on ajoute ces mêmes équations, après les avoir multipliées d'abord par $\cos\alpha$, $\cos\xi$, $\cos\lambda$, puis par $\cos6$, $\cos\eta$, $\cos\mu$, puis enfin par $\cos\gamma$, $\cos\zeta$, $\cos\nu$, il viendra

$$(9) \quad \begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{R}{u}\cos\xi + \sqrt{1 - \dfrac{R^2}{u^2}}\cos\lambda, \\ \cos6' = \dfrac{R}{u}\cos\eta + \sqrt{1 - \dfrac{R^2}{u^2}}\cos\mu, \\ \cos\gamma' = \dfrac{R}{u}\cos\zeta + \sqrt{1 - \dfrac{R^2}{u^2}}\cos\nu, \end{cases}$$

et les équations (2) deviendront alors

$$(10) \quad \begin{cases} x' = x + R\cos\xi + \sqrt{u^2 - R^2}\cos\lambda, \\ y' = y + R\cos\eta + \sqrt{u^2 - R^2}\cos\mu, \\ z' = z + R\cos\zeta + \sqrt{u^2 - R^2}\cos\nu. \end{cases}$$

Toutes les quantités relatives à la courbe AM sont données en fonction d'une certaine variable indépendante; donc, lorsque l'on connaîtra l'expression de u en fonction

de cette même variable, les équations (10) détermineront complétement la développante demandée.

Pour trouver u, il suffit de différentier l'équation (7); cela donne

$$\begin{aligned}
&\frac{ds'}{R'}(\cos\xi\cos\xi' + \cos\eta\cos\eta' + \cos\zeta\cos\zeta')\\
&-\frac{ds}{R}(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')\\
&-\frac{ds}{T}(\cos\lambda\cos\alpha' + \cos\mu\cos\beta' + \cos\nu\cos\gamma') = d\frac{R}{u},
\end{aligned}$$

ou, à cause des formules (5), (6), (7), (8),

$$(11) \qquad d\frac{R}{u} + d\tau\sqrt{1 - \frac{R^2}{u^2}} = 0,$$

en écrivant $d\tau$ au lieu de $\frac{ds}{T}$ pour représenter l'angle de contingence relatif à la deuxième courbure.

Telle est l'équation qui détermine u. Si la courbe proposée est gauche, $d\tau$ n'est pas nul, et l'équation (11) donne

$$\frac{-d\frac{R}{u}}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{u^2}}} = d\tau;$$

le premier membre est la différentielle de l'arc dont le cosinus est $\frac{R}{u}$: on a donc, en désignant par g une constante arbitraire,

$$\text{arc}\cos\frac{R}{u} = \tau + g,$$

ou

$$(12) \qquad \frac{R}{u} = \cos(\tau + g), \quad u = \frac{R}{\cos(\tau + g)}.$$

Si la courbe proposée est plane, l'équation (11) se réduit à

$$d\frac{R}{u} = 0,$$

et l'on a

$$(13) \qquad \frac{R}{u} = \cos g, \quad u = \frac{R}{\cos g},$$

g désignant une constante arbitraire; cette valeur de u est donc donnée par la formule (12) du cas général, quand on y suppose $\tau = 0$.

En substituant dans les équations (10) la valeur de u qu'on vient de trouver, on obtient

$$(14) \qquad \begin{cases} x' = x + R\cos\xi + R\tang(\tau + g)\cos\lambda, \\ y' = y + R\cos\eta + R\tang(\tau + g)\cos\mu, \\ z' = z + R\cos\zeta + R\tang(\tau + g)\cos\nu. \end{cases}$$

Les seconds membres de ces formules sont des fonctions données d'une même variable indépendante; elles renferment cependant la quantité τ, arc de la courbe sphérique qui mesure la deuxième courbure de la courbe proposée, et la détermination de τ, en fonction de la variable indépendante adoptée, exigera dans la plupart des cas des opérations qui sont du ressort du Calcul intégral. Les équations (14) renfermant une constante arbitraire g, on voit que la courbe proposée a une infinité de développées.

296. Désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de courbure M_1 relatif au point M, et soit $A_1 M_1$ la courbe lieu de ce centre; on a (n° 264)

$$(15) \qquad x_1 = x + R\cos\xi, \quad y_1 = y + R\cos\eta, \quad z_1 = z + R\cos\zeta.$$

Quelque valeur que l'on donne à la constante g, les valeurs de x', y', z' ne pourront jamais coïncider avec celles de x_1, y_1, z_1 si τ n'est pas nul; donc la courbe

lieu des centres de courbure n'est jamais une développée dans le cas d'une courbe gauche.

Les équations (14) et (15) donnent

$$\frac{x'-x_1}{\cos\lambda}=\frac{y'-y_1}{\cos\mu}=\frac{z'-z_1}{\cos\nu}, \tag{16}$$

ce qui montre que les points M' des développées, qui répondent au point M de la courbe AM, sont sur la droite polaire M_0M_1 relative au point M. Il résulte de là que toutes les développées de la courbe AM sont situées sur la surface polaire, qui est ainsi le lieu géométrique de ces développées.

Enfin les développées que représentent les formules (14) sont toutes des courbes gauches, à l'exception de celle qui répond à $g=0$, dans le cas où τ est nul. En effet la différentiation des formules (5) donne (n° 274)

$$\begin{aligned} d\sigma'\cos\alpha' + d\tau'\cos\lambda' &= d\sigma\cos\xi,\\ d\sigma'\cos\beta' + d\tau'\cos\mu' &= d\sigma\cos\eta,\\ d\sigma'\cos\gamma' + d\tau'\cos\nu' &= d\sigma\cos\zeta, \end{aligned}$$

d'où

$$d\sigma'^2 + d\tau'^2 = d\sigma^2;$$

si donc $d\tau'$ est nul, on aura $d\sigma'=d\sigma$ et

$$\cos\alpha'=\cos\xi,\quad \cos\beta'=\cos\eta,\quad \cos\gamma'=\cos\zeta,$$

ce qui exige, d'après les formules (7) ou (8), que l'on ait

$$u=\mathrm{R},$$

mais cette valeur n'a lieu que si la courbe AM est plane, et elle répond à la valeur $g=0$. Dans le cas de $\tau=0$, $g=0$, le point M' coïncide avec le centre de courbure M_1; donc :

1° *Les développées d'une courbe gauche sont toutes des courbes gauches.*

2° *Une courbe plane n'a qu'une seule développée plane qui est le lieu de ses centres de courbure.*

297. Développement de la surface polaire. — Nous rapporterons à l'arête de rebroussement de la surface polaire le système des développées de la courbe donnée et le lieu de ses centres de courbure. Retranchant donc des coordonnées x', y', z', et x_1, y_1, z_1 données par les équations (14) et (15) les coordonnées x_0, y_0, z_0 du centre de la sphère osculatrice (n° **290**), on aura

$$x' - x_0 = \left[\mathrm{R}\,\mathrm{tang}(\tau + g) + \frac{d\mathrm{R}}{d\tau}\right]\cos\lambda,$$

$$y' - y_0 = \left[\mathrm{R}\,\mathrm{tang}(\tau + g) + \frac{d\mathrm{R}}{d\tau}\right]\cos\mu,$$

$$z' - z_0 = \left[\mathrm{R}\,\mathrm{tang}(\tau + g) + \frac{d\mathrm{R}}{d\tau}\right]\cos\nu,$$

et

$$x_1 - x_0 = \frac{d\mathrm{R}}{d\tau}\cos\lambda,$$

$$y_1 - y_0 = \frac{d\mathrm{R}}{d\tau}\cos\mu,$$

$$z_1 - z_0 = \frac{d\mathrm{R}}{d\tau}\cos\nu;$$

mais, ne voulant introduire que les quantités relatives à l'arête, nous remplacerons $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ par $\cos\alpha_0$, $\cos 6_0$, $\cos\gamma_0$, auxquels il est permis de supposer respectivement les mêmes signes, puis $d\tau$ par $d\sigma_0$ et même τ par σ_0. Je poserai en outre

$$\mathrm{R} = -\mathrm{X}\sin\sigma_0 + \mathrm{Y}\cos\sigma_0,$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\sigma_0} = -\mathrm{X}\cos\sigma_0 - \mathrm{Y}\sin\sigma_0,$$

et les nouvelles variables X et Y seront déterminées, en

fonction des seules quantités de l'arête, par les formules

$$(17) \qquad dX = ds_0 \cos\sigma_0, \quad dY = ds_0 \sin\sigma_0,$$

comme on l'a vu au n° 293. Alors les formules précédentes deviendront

$$(18) \quad \frac{x'-x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{y'-y_0}{\cos 6_0} = \frac{z'-z_0}{\cos\gamma_0} = \frac{-X\cos g + Y\sin g}{\cos(\sigma_0 + g)},$$

$$(19) \quad \frac{x_1-x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{y_1-y_0}{\cos 6_0} = \frac{z_1-z_0}{\cos\gamma_0} = -(X\cos\sigma_0 + Y\sin\sigma_0).$$

Cela posé, supposons que l'on ait choisi pour le plan des xy un plan tangent à la surface polaire et exécutons le développement de la surface dans ce plan; conservons les mêmes lettres pour représenter les diverses quantités de ces formules, après le développement. Comme les points M_0, M_1, M' sont toujours en ligne droite et que leurs distances mutuelles sont invariables, ainsi que les arcs s_0 et σ_0, les formules (18) et (19) subsisteront sans modification. Mais, après le développement, z_0, z_1, z' sont nuls; l'arête est devenue une courbe plane et $d\sigma_0$ peut être pris au lieu de $d\alpha_0$; on peut même supposer $\alpha_0 = \sigma_0$, à cause de la constante arbitraire g qui accompagne σ_0; d'après cela, on aura

$$\cos\alpha_0 = \cos\sigma_0, \quad \cos 6_0 = \sin\sigma_0, \quad \cos\gamma_0 = 0.$$

En outre, les formules (17) montrent que dX et dY ne sont autre chose que dx_0 et dy_0; on peut donc faire

$$X = x_0, \quad Y = y_0,$$

à cause de l'indétermination de l'origine des axes.

D'après cela, les transformées des développées auront pour équations

$$(20) \quad \frac{x'-x_0}{\cos\sigma_0} = \frac{y'-y_0}{\sin\sigma_0} = -\frac{(x_0\cos g + y_0\sin g)}{\cos(\sigma_0 + g)},$$

et la transformée du lieu des centres de courbure sera elle-même représentée par les équations

$$(21) \qquad \frac{x_1 - x_0}{\cos\sigma_0} = \frac{y_1 - y_0}{\sin\sigma_0} = -(x_0 \cos\sigma_0 + y_0 \sin\sigma_0).$$

On peut éliminer des équations (20) x_0, y_0 et σ_0; cette élimination donne

$$(22) \qquad x' \cos g - y' \sin g = 0,$$

et de là résulte ce théorème :

Théorème I. — *Les développées d'une courbe quelconque se transforment en des lignes droites passant par un point fixe* F, *après le développement de la surface polaire.*

Et, comme les longueurs des arcs ne changent pas, dans le développement, on peut ajouter que les développées sont, sur la surface polaire, les lignes les plus courtes entre deux de leurs points; elles sont, comme on dit, des lignes *géodésiques*.

La formule (21) comprend les deux équations

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) \operatorname{tang}\sigma_0,$$
$$y_1 = - x_1 \cot g\sigma_0.$$

La première représente la tangente au point (x_0, y_0) du développement de l'arête; la seconde équation est celle de la perpendiculaire abaissée de l'origine F sur cette tangente. On a donc cette autre proposition :

Théorème II. — *Le lieu des centres de courbure d'une courbe gauche devient, après le développement de la surface polaire, le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées sur les tangentes de l'arête transformée, par le point d'intersection de toutes les développées.*

298. Il faut remarquer le cas particulier où la courbe donnée est sphérique et celui où elle est plane. Dans le premier cas, la surface polaire est un cône ayant pour sommet le centre de la sphère qui contient la courbe; toutes nos formules subsistent. Lorsque la courbe donnée est plane, la surface polaire est un cylindre qui a pour section droite la développée plane de la courbe donnée. On peut supposer ici $\cos\lambda = 0$, $\cos\mu = 0$, $\cos\nu = 1$, et $z_1 = 0$; alors on a par les formules (14) (n° 296)

$$x' = x_1, \quad y' = y_1, \quad z' = \mathrm{R} \operatorname{tang} g;$$

l'origine de l'arc s_1 étant indéterminée, on peut prendre $\mathrm{R} = s_1$. Après le développement de la surface polaire, s_1 devient une abscisse rectiligne, et les transformées des développées sont des lignes droites représentées par l'équation

$$z' = s_1 \operatorname{tang} g;$$

ces développées, dont la tangente fait un angle constant avec la direction des génératrices de la surface polaire, ont reçu le nom d'*hélices*.

299. Recherche des développantes d'une courbe donnée. — Les équations du problème sont, comme au n° 295,

$$x' - x = u\cos\alpha', \quad y' - y = u\cos6', \quad z' - z = u\cos\gamma',$$
$$ds' = du;$$

mais la solution est beaucoup plus facile que celle du problème inverse, car ici x', y', z', α', $6'$, γ', s' sont exprimées en fonction d'une même variable, et l'on en conclut immédiatement les valeurs de x, y, z en fonction de cette variable. On a en effet

$$u = s' + g,$$

g étant une constante arbitraire, et les équations précédentes donnent ensuite

$$x = x' - (s' + g)\cos\alpha',$$
$$y = y' - (s' + g)\cos6',$$
$$z = z' - (s' + g)\cos\gamma'.$$

On voit qu'une courbe quelconque, plane ou gauche, a une infinité de développantes. La seule difficulté de ce problème réside dans la détermination de l'arc s', dont la différentielle est en général seule donnée. La recherche de s' est du ressort du Calcul intégral.

Application des théories précédentes à l'hélice.

300. Les coordonnées rectangulaires de l'hélice ordinaire peuvent être représentées par les équations

$$(1) \qquad x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = a\varphi\cot i,$$

i étant un angle donné et a le rayon du cylindre auquel appartient l'hélice. Nous conserverons toutes nos notations ; celles-ci étant toujours les mêmes, il serait superflu de les rappeler ici.

La différentiation des équations (1) donne

$$dx = -a\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = a\cos\varphi\, d\varphi, \quad dz = a\, d\varphi \cot i,$$

d'où

$$(2) \qquad ds = \frac{a\, d\varphi}{\sin i},$$

et, par suite,

$$(3) \quad \cos\alpha = -\sin i \sin\varphi, \quad \cos6 = \sin i \cos\varphi, \quad \cos\gamma = \cos i;$$

la dernière de ces équations montre que *la tangente à l'hélice fait avec l'axe du cylindre un angle constant égal à i.*

La différentiation des équations (3) donne

$$\cos\xi\, d\sigma = -\sin i \cos\varphi\, d\varphi,$$
$$\cos\eta\, d\sigma = -\sin i \sin\varphi\, d\varphi,$$
$$\cos\zeta\, d\sigma = 0,$$

d'où

(4) $$d\sigma = \sin i\, d\varphi,$$

et

(5) $$\cos\xi = -\cos\varphi, \quad \cos\eta = -\sin\varphi, \quad \cos\zeta = 0,$$

puis, par les équations (3) et (4),

(6) $$R = \frac{a}{\sin^2 i}.$$

Les formules (5) montrent que *la normale principale* ou *la direction du rayon de courbure est perpendiculaire à l'axe du cylindre,* et, d'après la formule (6), *le rayon de première courbure de l'hélice est constant.*

La différentiation des équations (5) donne

$$\cos\alpha\, d\sigma + \cos\lambda\, d\tau = -\sin\varphi\, d\varphi,$$
$$\cos\beta\, d\sigma + \cos\mu\, d\tau = \cos\varphi\, d\varphi,$$
$$\cos\gamma\, d\sigma + \cos\nu\, d\tau = 0,$$

ou, à cause des formules (3) et (4),

$$\cos\lambda\, d\tau = -\cos^2 i \sin\varphi\, d\varphi,$$
$$\cos\mu\, d\tau = \cos^2 i \cos\varphi\, d\varphi,$$
$$\cos\nu\, d\tau = -\cos i \sin i\, d\varphi.$$

On tire de là

(7) $$d\tau = \cos i\, d\varphi,$$

et

(8) $$\cos\lambda = -\cos i \sin\varphi, \quad \cos\mu = \cos i \cos\varphi, \quad \cos\nu = -\sin i;$$

puis, par les équations (2) et (7),

$$(9) \qquad T = \frac{a}{\sin i \cos i}.$$

On voit que *le plan osculateur fait un angle constant avec le plan de la section droite du cylindre*, et que *le rayon de la seconde courbure est constant.*

Le centre de la sphère osculatrice coïncide ici avec le centre de courbure; ses coordonnées sont

$$(10) \qquad \begin{cases} x_1 = x + R\cos\xi = -a\cot^2 i\cos\varphi, \\ y_1 = y + R\cos\eta = -a\cot^2 i\sin\varphi, \\ z_1 = z + R\cos\zeta = a\varphi\cot i. \end{cases}$$

Il résulte de ces formules que l'arête de rebroussement de la surface polaire est une hélice située sur un cylindre qui a le même axe que le cylindre de l'hélice donnée, et dont le rayon est $a\cot^2 i$.

L'équation du plan normal est

$$-\sin i\sin\varphi(x - a\cos\varphi) + \sin i\cos\varphi(y - a\sin\varphi) + \cos i(z - a\varphi\cot i) = 0,$$

ou

$$(11) \qquad -x\sin\varphi + y\cos\varphi + z\cot i = a\varphi\cot^2 i.$$

La dérivée de cette équation par rapport à φ est

$$(12) \qquad -x\cos\varphi - y\sin\varphi = a\cot^2 i;$$

on aura donc l'équation de la surface polaire en éliminant φ entre les équations (11) et (12). Cette surface est dite un *hélicoïde développable;* sa trace sur la base du cylindre a les deux équations

$$(13) \qquad \begin{cases} -x\cos\varphi + y\sin\varphi = a\varphi\cot^2 i, \\ -x\cos\varphi - y\sin\varphi = a\cot^2 i, \end{cases}$$

et, par conséquent (n° **244**), cette trace est une développante d'un cercle de rayon égal à $a \cot^2 i$.

Enfin, comme l'équation (7) donne

$$\tau = \varphi \cos i + \text{const.},$$

les développées de l'hélice seront représentées par les équations

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= -a \cot^2 i \cos\varphi - \frac{a \cos i}{\sin^2 i} \sin\varphi \operatorname{tang}(\varphi \cos i + g), \\ y &= -a \cot^2 i \sin\varphi + \frac{a \cos i}{\sin^2 i} \cos\varphi \operatorname{tang}(\varphi \cos i + g), \\ z &= a\varphi \cot i - \frac{a}{\sin i} \operatorname{tang}(\varphi \cos i + g), \end{aligned} \right.$$

ou g désigne une constante arbitraire; et, à cause de

$$s = \frac{a\varphi}{\sin i} + \text{const.},$$

on aura, pour les développantes,

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= a \cos\varphi + \left(\frac{a\varphi}{\sin i} + g\right) \sin i \sin\varphi, \\ y &= a \sin\varphi - \left(\frac{a\varphi}{\sin i} + g\right) \sin i \cos\varphi, \\ z &= -g \cos i. \end{aligned} \right.$$

Ces développantes de l'hélice sont des développantes de cercle, ce qui s'accorde avec le résultat obtenu au n° **298**.

301. L'hélice a, comme on vient de le voir, ses deux courbures constantes; il est facile d'établir qu'elle est la seule courbe qui possède cette propriété.

Pour le démontrer, considérons une courbe dans laquelle les rayons R et T des deux courbures sont

supposés constants. D'après les formules (2) et (3) du n° 274, on a

$$R\,d\cos\alpha - T\,d\cos\lambda = 0,$$
$$R\,d\cos\beta - T\,d\cos\mu = 0,$$
$$R\,d\cos\gamma - T\,d\cos\nu = 0;$$

par conséquent, les différences

$$R\cos\alpha - T\cos\lambda,\quad R\cos\beta - T\cos\mu,\quad R\cos\gamma - T\cos\nu$$

sont constantes, et, comme la somme de leurs carrés est égale à $\sqrt{R^2+T^2}$, on aura

$$R\cos\alpha - T\cos\lambda = \sqrt{R^2+T^2}\cos a,$$
$$R\cos\beta - T\cos\mu = \sqrt{R^2+T^2}\cos b,$$
$$R\cos\gamma - T\cos\nu = \sqrt{R^2+T^2}\cos c,$$

a, *b*, *c* désignant les angles qu'une droite fixe arbitraire fait avec les axes. On peut faire coïncider l'axe des *z* avec cette droite, il vient alors

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &R\cos\alpha - T\cos\lambda = 0,\\ &R\cos\beta - T\cos\mu = 0,\\ &R\cos\gamma - T\cos\nu = \sqrt{R^2+T^2}.\end{aligned}\right.$$

Retranchons les deux premières de ces formules l'une de l'autre, après les avoir multipliées par $\cos\eta$ et $\cos\xi$ respectivement; retranchons également la première et la troisième multipliées par $\cos\zeta$ et $\cos\xi$; puis la seconde et la troisième multipliées par $\cos\zeta$ et $\cos\eta$; on aura, par les formules du n° 265,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &T\cos\alpha + R\cos\lambda = +\sqrt{R^2+T^2}\cos\eta,\\ &T\cos\beta + R\cos\mu = -\sqrt{R^2+T^2}\cos\xi,\\ &T\cos\gamma + R\cos\nu = 0.\end{aligned}\right.$$

Ces équations, combinées avec les précédentes, donnent

$$(3)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{-\mathrm{T}}{\sqrt{\mathrm{R}^2+\mathrm{T}^2}}\cos\eta, \\ \cos6 = \dfrac{+\mathrm{T}}{\sqrt{\mathrm{R}^2+\mathrm{T}^2}}\cos\xi, \\ \cos\gamma = \dfrac{\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2+\mathrm{T}^2}}. \end{cases}$$

On doit remarquer que l'analyse précédente suppose seulement que le rapport $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{T}}$ des deux courbures soit constant; la dernière des équations (3) montre que la tangente de la courbe fait avec l'axe des z un angle constant. On a donc ce théorème :

Si les deux courbures d'une courbe ont entre elles un rapport constant, cette courbe est une hélice tracée sur un cylindre dont la base est une courbe quelconque.

Des équations (3) on tire

$$\cos\alpha\cos\xi + \cos6\cos\eta = 0,$$

d'où il résulte que $\cos\gamma\cos\zeta$ est nul; donc $\cos\zeta = 0$. Alors on peut écrire

$$\cos\eta = \sin\xi,$$

et

$$(4)\quad \begin{cases} \cos\alpha = +\sin\gamma\sin\xi, \\ \cos6 = -\sin\gamma\cos\xi; \end{cases}$$

en différentiant la première des équations (4), on a

$$\frac{ds}{\mathrm{R}}\cos\xi = \sin\gamma\cos\xi\, d\xi, \quad \text{d'où} \quad ds = \mathrm{R}\sin\gamma\, d\xi,$$

mais les mêmes équations (4) donnent

$$\frac{dx}{ds} = \sin\gamma\sin\xi, \quad \frac{dy}{ds} = -\sin\gamma\cos\xi$$

et l'on a aussi

$$\frac{dz}{ds} = \cos\gamma;$$

donc

$$dx = R\sin^2\gamma \sin\xi\, d\xi,$$
$$dy = -R\sin^2\gamma\cos\xi\, d\xi,$$
$$dz = R\sin\gamma\cos\gamma\, d\xi.$$

Nous avons supposé constant le rapport de T à R; on voit que, si le rayon R est lui-même constant, les coordonnées ne diffèrent des quantités

$$-R\sin^2\gamma\cos\xi, \quad -R\sin^2\gamma\sin\xi, \quad R\xi\sin\gamma\cos\gamma$$

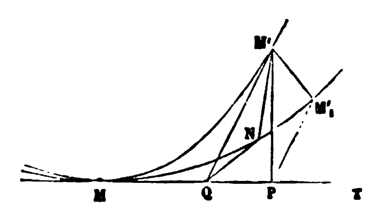
que par des constantes, et, l'origine de ces coordonnées étant arbitraire, on pourra poser

$$(5)\quad x = -R\sin^2\gamma\cos\xi,\quad y = -R\sin^2\gamma\sin\xi,\quad z = R\xi\sin\gamma\cos\gamma;$$

les équations (5) appartiennent bien à une hélice ordinaire dont le rayon de courbure est R.

De l'ordre du contact de deux courbes quelconques. Des courbes osculatrices.

302. Considérons deux courbes quelconques MM', MM'$_1$ ayant au point M la tangente commune MT. Prenons sur la courbe MM' un point M' infiniment voisin



de M et menons, par ce point, le plan M'PM'$_1$ perpendiculaire à la tangente MT; soient M'$_1$ et P les points où ce

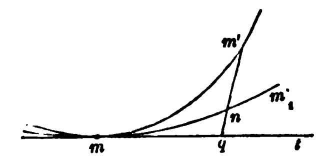
plan rencontre la courbe MM'_1 et la droite MT. Nous dirons que les deux courbes MM', MM'_1 ont au point M un contact de l'ordre n, si la distance $M'M'_1$ est un infiniment petit de l'ordre $n+1$, MP étant l'infiniment petit principal. Il est évident que, dans l'estimation de l'ordre du contact, on peut, à l'infiniment petit principal et à l'infiniment petit caractéristique du contact, substituer deux autres infiniment petits dont les rapports aux premiers tendent vers des limites finies. Par exemple, si l'on mène par le point M' un plan $M'QN$ parallèle à un plan fixe non parallèle à la tangente MT, que N et Q soient les points où ce plan rencontre la courbe MM'_1 et la tangente MT, on pourra prendre MQ pour infiniment petit principal et $M'N$ pour infiniment petit caractéristique. En effet, menons la corde NM'_1, les angles N et M'_1 du triangle $NM'M'_1$ tendront vers des limites finies; ces limites sont les angles formés par la tangente MT avec des droites situées respectivement dans deux plans fixes non parallèles à MT; il résulte de là que le rapport des côtés $M'M'_1$ et $M'N$ du triangle $M'M'_1N$ tend vers une limite finie. D'un autre côté, $M'P$ et QP sont infiniment petits par rapport à MP; car

$$M'P = MP \operatorname{tang} M'MP,$$

et l'angle $M'MP$ est infiniment petit; en outre le rapport de QP à $M'P$ est la cotangente de l'angle $M'QP$ qui a une limite finie; il en résulte que le rapport de MQ à MP a pour limite l'unité.

Cela posé, projetons la figure sur un plan perpendiculaire au plan $M'NQ$ et soient mm', mn, mq les projections des courbes MM', MN et de la tangente MQ. La droite MT n'étant pas perpendiculaire au plan de projection, la limite du rapport $\frac{MQ}{mq}$ a une valeur finie; le rap-

port des infiniment petits M'N, $m'n$ a aussi une limite finie, à moins cependant que M'N ne fasse un angle infi-



niment petit avec l'axe du plan de projection; dans ce cas, le rapport $\frac{m'n}{M'N}$ est infiniment petit.

Il résulte de là que, si les deux courbes proposées ont au point M un contact de l'ordre n, les projections de ces courbes sur un plan non perpendiculaire à la tangente commune ont un contact dont l'ordre est au moins égal à n. Cet ordre n'est supérieur à n que si M'N fait un angle infiniment petit avec l'axe du plan de projection, et, comme cette circonstance ne peut pas se présenter pour deux plans de projection non parallèles, on a ce théorème :

Pour que deux courbes aient en un point donné un contact de l'ordre n, il faut et il suffit que leurs projections sur deux plans non parallèles aient un contact de l'ordre n au moins.

Nous n'avons considéré que des projections orthogonales, mais il est facile de voir que le précédent énoncé subsiste quand on fait usage de projections obliques. Au moyen du théorème que nous venons d'établir, on exprimera les conditions du contact des courbes gauches, par la méthode du n° 211 qui se rapporte aux courbes planes.

303. On nomme *courbe osculatrice* en un point d'une courbe donnée celle des courbes d'une espèce donnée

qui a, avec la courbe donnée, le contact de l'ordre le plus élevé. Si la courbe d'espèce donnée dépend de $2n$ ou de $2n+1$ paramètres arbitraires, on pourra établir un contact d'ordre $n-1$ entre les projections des deux courbes sur deux plans non parallèles; ces courbes auront donc elles-mêmes un contact d'ordre $n-1$. Si le nombre des paramètres est $2n+1$, l'un d'eux demeurera indéterminé; on pourra en disposer de manière à satisfaire à une condition nouvelle, mais il ne suffira pas en général pour élever d'une unité l'ordre du contact.

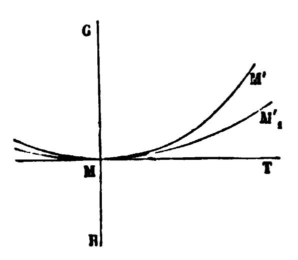
Du cercle osculateur en un point d'une courbe gauche. Son identité avec le cercle de courbure.

304. Il n'y a que six arbitraires dans les équations du cercle, savoir les coordonnées du centre, le rayon et deux des angles que fait l'axe du cercle avec les axes coordonnés. On a ici $2n=6$, $n-1=2$; donc le contact d'une courbe avec son cercle osculateur est du deuxième ordre. Or on a vu (n° 282) que les projections d'une courbe et de son cercle de courbure sur un plan ont un contact du deuxième ordre; les deux courbes ont donc elles-mêmes ce contact (n° 302), et il s'ensuit que le cercle osculateur n'est autre chose que le cercle de courbure.

Du contact des surfaces courbes.

305. Considérons deux surfaces passant par un point M et ayant en ce point le même plan tangent. Menons un plan par la normale commune GH; ce plan coupera les surfaces suivant deux courbes MM', MM'_1 qui auront, en M, la même tangente MT; l'ordre n du contact de ces courbes pourra varier avec le plan normal GHT. Si, pour tous les plans normaux menés par GH, l'ordre du contact

des sections faites dans la surface n'est jamais inférieur à n et que cet ordre ne soit pas non plus supérieur à n, pour toutes les sections, on dit que les deux surfaces ont au point M un contact de l'ordre n.



Supposons les axes coordonnés choisis de manière que celui des z soit parallèle à la normale GH et que les deux autres soient parallèles au plan tangent; si l'on désigne par x, y les deux coordonnées du point M parallèles aux axes des x et des y; par Z et Z' les ordonnées des surfaces qui répondent aux abscisses

$$x + \Delta x = x + \rho\cos\omega, \quad y + \Delta y = y + \rho\sin\omega,$$

il faut et il suffit, pour le contact d'ordre n, que la différence

$$Z - Z'$$

soit un infiniment petit de l'ordre $n+1$, au moins relativement à ρ, quel que soit l'angle ω. Or, z et z' étant les valeurs de Z et de Z' qui répondent à $\rho = 0$, on a

$$Z = z + \frac{dz}{1} + \frac{d^2 z}{1.2} + \ldots + \frac{d^n z}{1.2\ldots n} + R_{n+1},$$

$$Z' = z' + \frac{dz'}{1} + \frac{d^2 z'}{1.2} + \ldots + \frac{d^n z'}{1.2\ldots n} + R'_{n+1};$$

donc les conditions du contact sont

$$z' = z, \quad dz' = dz, \quad d^2 z' = d^2 z, \quad \ldots, \quad d^n z' = d^n z,$$

les valeurs de dx et dy étant $\rho\cos\omega$ et $\rho\sin\omega$.

Mais, comme ces conditions doivent avoir lieu quel que soit ω, on voit qu'il est nécessaire et suffisant pour le contact d'ordre n que les ordonnées z des deux surfaces soient égales au point M, ainsi que toutes leurs dérivées partielles correspondantes, jusqu'à celles de l'ordre n inclusivement. Le nombre total de ces conditions est

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Cette conclusion subsiste quels que soient les axes auxquels les surfaces sont rapportées. En effet, si l'on exécute une transformation de coordonnées, chaque dérivée partielle d'ordre μ de la nouvelle ordonnée z de l'une des surfaces relativement aux nouvelles abscisses s'exprimera, comme on sait, par une fonction qui contiendra les dérivées partielles de l'ancien z relativement aux anciennes abscisses, jusqu'à celles de l'ordre μ inclusivement. Donc les égalités qui ont lieu à l'égard du système d'axes que nous avons choisi ont lieu également, dans le cas d'un contact d'ordre n, relativement à un autre système d'axes; notre raisonnement prouve aussi que la réciproque a lieu. Il faut seulement remarquer que, si l'axe des z du nouveau système était parallèle au plan tangent, les dérivées partielles du premier ordre seraient infinies, et les formules illusoires.

306. Si l'on considère une surface donnée et une famille de surfaces dans l'équation desquelles figurent k arbitraires, on pourra nommer *surface osculatrice* de la surface donnée en un point donné celle qui a avec celle-ci le contact de l'ordre le plus élevé. Mais cette considération ne conduit à aucun résultat important; la surface osculatrice, telle que nous venons de la définir,

aurait avec la proposée un contact dont l'ordre n serait le plus grand entier satisfaisant à la condition

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \text{ou} < k,$$

et le plus souvent il resterait des arbitraires indéterminées dans l'équation de la surface osculatrice.

Dans le cas du plan, on a $k=3$ et $n=1$; le plan osculateur a un contact du premier ordre, il n'est autre que le plan tangent. Dans le cas de la sphère, on a $k=4$, puis $n=1$; mais il reste une arbitraire non employée. Il est évident qu'il n'y a point lieu d'admettre pour une surface de sphère osculatrice.

CHAPITRE X.

DES LIGNES TRACÉES SUR LES SURFACES COURBES. — ÉTUDE DE DIVERSES CLASSES DE SURFACES.

Expression du rayon de courbure d'une courbe tracée sur une surface donnée. — Théorème de Meunier.

307. Nous désignerons par x, y, z les coordonnées rectangulaires de la surface donnée, et nous poserons

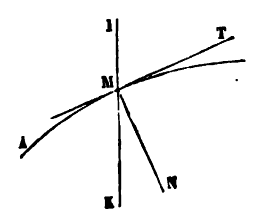
$$dz = p\,dx + q\,dy, \tag{1}$$

$$\left\{\begin{aligned} dp &= r\,dx + s\,dy, \\ dq &= s\,dx + t\,dy. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Si l'on prend x et y pour variables indépendantes, on aura, par ces formules,

$$d^2 z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2.$$

Cela posé, considérons une courbe AM tracée sur la surface. Soient $M(x, y, z)$ un point de cette courbe, MT la tangente en M, et MN la normale principale dont la direction est celle du rayon de courbure ; soit enfin IK



la normale en M à la surface. Désignons par α, 6, γ les angles que fait la direction MT de la tangente avec les

parties positives des axes coordonnés; par ξ, η, ζ les angles formés avec les mêmes axes, par la direction MN de la normale principale; par R le rayon de courbure de la courbe au point M et par σ la courbure de l'arc AM compté à partir d'une origine quelconque A. Alors $d\sigma$ sera l'angle de contingence et $R\,d\sigma$ exprimera la différentielle de l'arc AM. On aura donc, comme on l'a vu dans le Chapitre précédent (nos 260 et 263),

$$(3) \quad dx = R\,d\sigma\cos\alpha, \quad dy = R\,d\sigma\cos\beta, \quad dz = R\,d\sigma\cos\gamma,$$

et

$$(4) \quad d\cos\alpha = d\sigma\cos\xi, \quad d\cos\beta = d\sigma\cos\eta, \quad d\cos\gamma = d\sigma\cos\zeta.$$

Maintenant, d'après la formule (1), les angles que forme, avec les parties positives des axes, l'une des deux directions de la normale IK de la surface ont pour cosinus

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

le radical $\sqrt{1+p^2+q^2}$ étant pris avec un signe quelconque. Ce signe ayant été fixé à volonté, la direction de la normale à laquelle il correspond sera déterminée; soit MK cette direction. Désignons enfin par θ l'angle compris entre o et π que forment entre elles les directions MN et MK, on aura

$$\cos\theta = \frac{\cos\zeta - p\cos\xi - q\cos\eta}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

ou, à cause des formules (4),

$$(5) \qquad d\sigma\cos\theta = \frac{d\cos\gamma - p\,d\cos\alpha - q\,d\cos\beta}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

En substituant dans les formules (1) et (2) les valeurs de dx, dy, dz tirées des formules (3), on obtient

$$(6) \qquad \cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta,$$

et

$$(7)\qquad \begin{cases} dp = \mathrm{R}\,d\sigma(r\cos\alpha + s\cos\beta),\\ dq = \mathrm{R}\,d\sigma(s\cos\alpha + t\cos\beta); \end{cases}$$

la différentiation de la formule (6) donne ensuite

$$d\cos\gamma = (p\,d\cos\alpha + q\,d\cos\beta) + (dp\cos\alpha + dq\cos\beta),$$

et, à cause des formules (7),

$$(8)\qquad \begin{cases} d\cos\gamma - p\,d\cos\alpha - q\,d\cos\beta\\ \quad = \mathrm{R}\,d\sigma(r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta). \end{cases}$$

La formule (5) se change alors dans la suivante :

$$(9)\qquad \frac{\mathrm{R}}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta},$$

et celle-ci exprime le rayon de courbure de la courbe AM en fonction des quantités relatives à la surface et des angles qui déterminent sa tangente et sa normale principale. Le rayon R étant une quantité positive, le signe de $\cos\theta$ sera toujours celui du second membre de la formule (9).

308. Théorème de Meunier. — Considérons maintenant la section normale obtenue en coupant la surface par le plan des lignes MT, MK. Soit R_0 le rayon de courbure au point M de cette section; l'angle θ sera ici 0 ou π; par conséquent, la formule (9) donnera

$$\frac{\mathrm{R}_0}{\pm 1} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta},$$

et l'on aura, en conséquence,

$$(10)\qquad \mathrm{R} = \pm\mathrm{R}_0\cos\theta,$$

le signe ambigu $\pm$ devant être remplacé par $+$ ou par $-$, selon que θ est inférieur ou supérieur à $\frac{\pi}{2}$.

La formule (10) exprime l'important théorème de Meunier qui consiste dans la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Le rayon de courbure en un point d'une courbe quelconque tracée sur une surface est égal au produit du rayon de courbure de la section normale qui contient la tangente à la courbe, multiplié par le cosinus de l'angle que le plan de cette section fait avec le plan osculateur de la courbe.*

Et ce théorème conduit immédiatement à cette conséquence remarquable :

COROLLAIRE. — *Si l'on construit une sphère qui ait même centre et même rayon que le cercle de courbure d'une section normale faite dans une surface, tous les plans menés par la tangente à cette courbe couperont la sphère suivant des petits cercles qui seront les cercles de courbure des sections obliques faites dans la surface par les mêmes plans.*

D'après le théorème de Meunier, la comparaison des courbures des diverses courbes que l'on peut tracer sur une surface par un point donné se ramène à la comparaison des courbures des sections normales.

Comparaison des rayons de courbure des sections normales en un point d'une surface. — Des sections principales.

309. Nous avons vu que le rayon de courbure R d'une section normale en un point M d'une surface est donné par la formule

$$(1)\qquad \frac{R}{\pm 1} = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos6 + t\cos^2 6},$$

où le signe du radical a été choisi à volonté; le signe ambigu du dénominateur du premier membre doit être

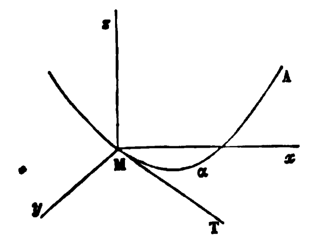
déterminé de manière que R ait une valeur positive. Mais ce dénominateur ± 1 est le cosinus de l'angle formé par la direction MN du rayon R avec la direction MK de la normale à la surface, qui répond au signe adopté pour le radical $\sqrt{1+p^2+q^2}$; cet angle est égal à o ou à π, par conséquent le signe ambigu $\pm$ doit être remplacé par $+$ quand le rayon R est dirigé suivant MK, et par $-$ quand la direction du même rayon R est opposée à celle de MK. Si donc on convient que le rayon de courbure R soit positif dans le premier cas et négatif dans le second cas, on aura la formule unique

$$(2) \qquad R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos 6 + t\cos^2 6},$$

qui déterminera en grandeur et en direction les rayons de courbure des sections normales au point M de la surface donnée.

Les rayons de courbure des diverses sections normales en un point M d'une surface sont tous situés sur une même droite et comptés à partir d'une origine commune; nous nous conformons donc aux règles générales de la Géométrie en regardant ces rayons comme positifs ou négatifs suivant qu'ils sont dirigés dans un sens ou dans l'autre.

310. La comparaison que nous avons en vue de-



viendra beaucoup plus aisée, si l'on place l'origine des coordonnées au point M de la surface, et que l'on fasse

coïncider l'un des axes, celui des z par exemple, avec la direction MK de la normale; les axes des x et des y seront alors dans le plan tangent, et l'on aura

$$p=0,\quad q=0,$$

puis

$$\cos\gamma=0,\quad \cos 6=\sin\alpha;$$

le radical $\sqrt{1+p^2+q^2}$ se réduit à ± 1, mais nous sommes libres de fixer le signe à volonté, et nous admettrons le signe $+$.

D'après cela, la formule (2) deviendra

$$(3)\qquad R=\frac{1}{r\cos^2\alpha+2s\sin\alpha\cos\alpha+t\sin^2\alpha};$$

le dénominateur de cette expression est égal à

$$\frac{r+t}{2}+\frac{r-t}{2}\cos 2\alpha+s\sin 2\alpha,$$

et si l'on détermine un angle $2\alpha_0$ compris entre 0 et π, de manière que l'on ait

$$s=\frac{r-t}{2}\operatorname{tang} 2\alpha_0,$$

la formule (3) prendra la forme

$$(4)\qquad R=\frac{1}{\frac{r+t}{2}+\sqrt{s^2+\left(\frac{r-t}{2}\right)^2}\cos 2(\alpha-\alpha_0)},$$

le radical $\sqrt{s^2+\left(\frac{r-t}{2}\right)^2}$ ayant le signe du quotient de $\frac{r-t}{2}$ par $\cos 2\alpha_0$.

On voit que le rayon R devient maximum ou minimum pour les valeurs de α qui satisfont à la condition

$$\cos 2(\alpha-\alpha_0)=\pm 1,$$

laquelle donne

$$\alpha = \alpha_0 + i\frac{\pi}{2},$$

i étant un nombre entier. Mais, comme deux valeurs de α, qui diffèrent entre elles d'un multiple de π, répondent à la même section normale, il suffit de considérer les deux valeurs

$$\alpha = \alpha_0, \quad \alpha = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$$

qui définissent deux sections normales perpendiculaires entre elles; pour l'une d'elles, le rayon de courbure R est un minimum, pour l'autre ce rayon est un maximum. Ces deux sections normales sont dites les *sections principales* de la surface au point M et leurs rayons de courbure sont nommés les *rayons de courbure principaux de la surface*, au même point.

Cela suppose que s et $r - t$ ne sont pas nuls simultanément; car, si l'on a $s = 0$, $r = t$, l'angle α_0 n'est plus déterminé. Dans ce cas, la formule (3) se réduit à

$$R = \frac{1}{r};$$

d'où il suit que toutes les sections normales de la surface au point M ont le même rayon de courbure : deux sections perpendiculaires quelconques peuvent être regardées comme formant un système de sections principales. Les points des surfaces qui ont cette propriété ont reçu le nom d'*ombilics* ou *points de courbure sphérique*.

311. Nous simplifierons la discussion de la formule (3), si nous prenons pour les plans coordonnés zx et zy les plans des sections principales dont nous venons de démontrer l'existence. Effectivement, l'angle désigné par α_0 sera nul, et la formule qui sert à définir cet angle nous donnera

$$s = 0.$$

Alors la formule (3) deviendra

$$R = \frac{1}{r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha},$$

ou

$$(5) \qquad \frac{1}{R} = r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha.$$

Soient R_1, R_2 les rayons de courbure des sections principales faites par les plans zx, zy; la formule (5) donnera, pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$(6) \qquad \frac{1}{R_1} = r, \quad \frac{1}{R_2} = t;$$

par suite, l'expression générale de $\frac{1}{R}$ sera

$$(7) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha.$$

Le second membre de cette formule (7) ne change pas quand on change α en $\pi - \alpha$; on a donc ce théorème :

Deux sections normales également inclinées sur une section principale ont des rayons de courbure égaux et de même signe.

Si l'on désigne par R' ce que devient R quand α augmente de $\frac{\pi}{2}$, on aura

$$(8) \qquad \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1}\sin^2\alpha + \frac{1}{R_2}\cos^2\alpha,$$

et les formules (7) et (8) donneront

$$(9) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

La demi-somme $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ des courbures $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ des

sections principales est dite la *courbure moyenne de la surface* au point M; la formule (9) exprime ainsi le théorème suivant :

La moyenne des courbures de deux sections normales perpendiculaires entre elles est toujours égale à la courbure moyenne de la surface.

312. Examinons maintenant comment R varie quand on donne à α les valeurs successives qui conviennent aux diverses sections normales, et qui restent comprises, si l'on veut, entre o et π.

Supposons d'abord que les rayons de courbure principaux R_1, R_2 soient de même signe; on peut admettre qu'ils sont positifs, car, pour les faire changer de signe, il suffit de changer la direction des z positives. Cela posé, soit

$$R_1 < R_2,$$

la formule (7) peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \sin^2 \alpha.$$

On voit que R croît de R_1 à R_2 quand α croît de o à $\frac{\pi}{2}$, et qu'il décroît ensuite de R_2 à R_1 quand α croît de $\frac{\pi}{2}$ à π. La surface est tout entière située d'un même côté du plan tangent dans le voisinage du point de contact.

Supposons en second lieu que R_1 et R_2 soient de signes contraires; admettons que R_1 soit positif, et posons

$$R_2 = - R_1 \operatorname{tang}^2 \alpha_0,$$

α_0 étant un angle compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, la formule (7) deviendra

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 \sin^2 \alpha_0} (\sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha).$$

D'après cela, quand on fait croître α de o à α_0, R croît de R_1 à $+\infty$, et il change de signe en passant par l'infini; α continuant de croître de α_0 à $\frac{\pi}{2}$, R croît lui-même de $-\infty$ à $-R_1 \tang^2\alpha_0$ ou R_2. Quand α croît de $\frac{\pi}{2}$ à $\pi-\alpha_0$, R décroît de R_2 à $-\infty$, et il change encore de signe en passant par l'infini. Enfin, α continuant à croître de $\pi-\alpha_0$ à π, R décroît de nouveau de $+\infty$ à R_1. Dans le cas dont nous nous occupons, les points infiniment voisins du point considéré sont les uns d'un côté du plan tangent, les autres de l'autre côté.

Autre manière de présenter les résultats qui précèdent. De l'indicatrice.

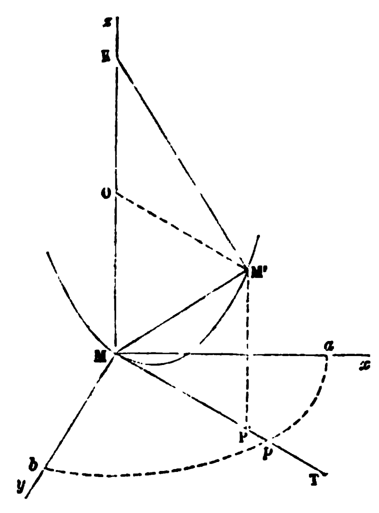
313. Des considérations très-ingénieuses dues à Charles Dupin conduisent facilement aux résultats divers que nous venons d'obtenir; nous ne pouvons nous dispenser de faire connaître ici cette élégante méthode.

Considérons une surface quelconque et rapportons-la, comme précédemment, à trois axes rectangulaires passant par un de ses points M, l'axe Mz coïncidant avec la normale, et les deux autres, Mx, My, étant en conséquence dans le plan tangent en M.

Soit MM' la section faite dans la surface par le plan zMT, dont la trace sur le plan xy fait, avec l'axe des x, l'angle α. Joignons le point M à un point infiniment voisin M' de la courbe MM', et menons par le point M', dans le plan zMT, les droites M'O et M'K perpendiculaires à Mz et à MM' respectivement. Soient O et K les points où ces perpendiculaires rencontrent la normale Mz.

Le cercle circonscrit au triangle rectangle MM'K a son centre sur la normale Mz; il a donc pour limite (n° 217)

le cercle de courbure en M de la courbe MM′, lorsque le point M′ se rapproche indéfiniment du point M. Or



le diamètre du cercle MM′K est

$$MK = MO + OK = MO + \frac{\overline{M'O}^2}{MO};$$

donc, en désignant par R le rayon de courbure en M de la section normale MM′, on aura

$$R = \lim \frac{\overline{M'O}^2}{2MO}.$$

Si, par le point O, on mène un plan parallèle au plan tangent xy, on déterminera dans la surface une certaine courbe J passant par le point M′, et M′O sera le rayon vecteur u du point M′; d'ailleurs, l'équation du plan de la courbe J est $z = \pm$ MO; la formule précédente peut donc s'écrire comme il suit :

$$(1) \qquad R = \lim \frac{u^2}{2z},$$

et elle fait connaître en grandeur et en direction le rayon de courbure R.

Cela étant, désignons par h une longueur arbitraire déterminée de même signe que z, et soit ρ une longueur telle, que le rapport des infiniment petits

$$\frac{u^2}{\rho^2}, \quad \frac{z}{h}$$

ait pour limite l'unité. La longueur ρ étant ainsi déterminée, prenons $Mp = \rho$ à partir du point M, sur la trace MT de la section MM'; chaque section normale donnera un tel point p, et même deux points p symétriques par rapport à l'origine. Le lieu géométrique de tous ces points p est une courbe abp située dans le plan xy à laquelle Charles Dupin a donné le nom d'*indicatrice*. Cette dénomination est parfaitement justifiée par la propriété dont jouit cette courbe; effectivement, le rapport des infiniment petits $\frac{u^2}{\rho^2}$, $\frac{z}{h}$ ayant pour limite l'unité, la formule (1) nous donne

$$R = \frac{\rho^2}{2h}, \tag{2}$$

et, par conséquent :

Les rayons de courbure des diverses sections normales sont proportionnels aux carrés des rayons vecteurs de l'indicatrice dirigés suivant les traces des plans de ces sections.

L'infiniment petit z étant une constante, dans le passage d'une section normale à une autre, le rapport du rayon vecteur u de la courbe variable J au rayon vecteur ρ de l'indicatrice est constant, en négligeant les quantités infiniment petites par rapport à u. On peut donc dire que *l'indicatrice est une courbe semblable à la section faite*

dans la surface par un plan parallèle au plan tangent et infiniment voisin de celui-ci.

Si la surface est tout entière située d'un même côté du plan tangent, dans le voisinage du point M, l'indicatrice, construite comme nous l'avons indiqué, fera connaître les rayons de courbure de toutes les sections normales. Mais, quand le contraire a lieu, la formule (1) ne peut donner tous les rayons qu'à la condition que l'infiniment petit z reçoive en même temps des valeurs positives et des valeurs négatives; alors il faudra donner à la ligne h le double signe $\pm$. L'indicatrice sera ainsi composée de deux courbes distinctes, et elle donnera, comme dans le premier cas, les rayons de courbure de toutes les sections normales.

314. Cherchons maintenant l'équation de l'indicatrice. Les coordonnées rectangulaires étant x, y, z, posons, comme à l'ordinaire,

$$dz = p\,dx + q\,dy,\quad dp = r\,dx + s\,dy,\quad dq = s\,dx + t\,dy;$$

les quantités z, p et q étant nulles au point M, on aura, pour un point quelconque M′ de la surface,

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + R_3;$$

dans cette formule, r, s, t ont les valeurs qui conviennent au point M, et R_3 désigne le reste de la série de Maclaurin arrêtée au troisième terme. L'équation précédente est celle de la surface, et si l'on y fait

$$x = u\cos\alpha,\quad y = u\sin\alpha,$$

elle deviendra l'équation de la section MM′ entre les coordonnées z et u. Faisant cette substitution et divisant par u^2, il viendra

$$\frac{z}{u^2} = \frac{1}{2}(r\cos^2\alpha + 2s\sin\alpha\cos\alpha + t\sin^2\alpha) + \frac{R_3}{u^2}.$$

Telle est la relation qui a lieu entre les infiniment petits z et u, considérés au numéro précédent. Comme le rapport $\frac{z}{u^2}$ a pour limite $\frac{h}{\rho^2}$, et que $\frac{R_3}{u^2}$ est infiniment petit, on aura à la limite

$$(3) \qquad \frac{h}{\rho^2} = \frac{1}{2}(r\cos^2\alpha + 2s\sin\alpha\cos\alpha + t\sin^2\alpha).$$

Cette équation est celle de l'indicatrice entre les coordonnées polaires ρ et α. Pour revenir aux coordonnées rectilignes, on posera

$$\rho\cos\alpha = x, \quad \rho\sin\alpha = y,$$

et l'équation (3) deviendra

$$(4) \qquad rx^2 + 2sxy + ty^2 = 2h,$$

h étant, nous le répétons, une ligne arbitraire à laquelle on doit donner le double signe $\pm$.

Si l'on a $rt - s^2 > 0$, il faut, pour avoir une courbe réelle, donner à h le signe des dérivées r, t dans l'équation (4); l'indicatrice est alors une ellipse.

Si l'on a $rt - s^2 = 0$, il faut encore donner à h le signe des dérivées r, t; l'indicatrice est formée dans ce cas de deux droites parallèles situées à des distances égales du point M.

Enfin, si l'on a $rt - s^2 < 0$, il faut donner à h le double signe $\pm$; dans ce cas, l'indicatrice est formée de deux hyperboles conjuguées ayant les mêmes asymptotes, et dont l'une a pour axe transverse l'axe non transverse de l'autre.

La formule (2), qui donne l'expression du rayon R, devient, à cause de l'équation (3),

$$(5) \qquad R = \frac{1}{r\cos^2\alpha + 2s\sin\alpha\cos\alpha + t\sin^2\alpha};$$

c'est la même que nous avons obtenue au n° 310 par une voie toute différente.

315. Les rayons de courbure des sections normales en un point d'une surface étant proportionnels aux carrés des rayons vecteurs de l'indicatrice, à chaque propriété de ces rayons vecteurs répond une propriété analogue des rayons de courbure.

Ainsi, dans l'ellipse, le rayon vecteur central a un maximum et un minimum, et les directions correspondantes sont perpendiculaires entre elles; donc, dans le cas de $rt - s^2 > 0$, où l'indicatrice est une ellipse, il existe deux sections normales de la surface, perpendiculaires entre elles, telles, que le rayon de courbure de l'une est un maximum et le rayon de courbure de l'autre un minimum : ce sont les sections que nous avons nommées principales. L'un des rayons de courbure devient infini dans le cas de $rt - s^2 = 0$, où l'indicatrice elliptique dégénère en deux droites parallèles. Enfin la même propriété subsiste lorsque l'indicatrice est formée du système de deux hyperboles. Dans un tel système, le carré du rayon vecteur central a deux minima qui répondent encore à deux directions rectangulaires; mais, comme ces deux rayons correspondent, l'un à une valeur positive, l'autre à une valeur négative du rayon de courbure, on voit que celui-ci a un maximum et un minimum comme dans le cas de l'ellipse, et que les sections correspondantes sont encore perpendiculaires entre elles.

Dans l'indicatrice elliptique, la somme des inverses des carrés de deux rayons perpendiculaires est constante; la même chose a lieu, dans l'indicatrice hyperbolique, en substituant la différence à la somme. Il en résulte, en ayant égard aux signes des rayons de courbure, que la somme des courbures de deux sections normales perpendiculaires entre elles est constante et égale à la somme

des courbures principales. Nous avons déjà démontré cette proposition au nº 311.

Deux rayons vecteurs de l'indicatrice également inclinés sur l'un des axes sont égaux entre eux : on en conclut que deux sections normales également inclinées sur l'une des sections principales ont la même courbure.

On voit enfin que les points des surfaces auxquels on donne le nom d'*ombilics* sont ceux pour lesquels l'indication est une circonférence de cercle; effectivement, toutes les sections normales ont alors la même courbure.

Dans les surfaces du deuxième degré, les sections faites par des plans parallèles sont des courbes semblables : il en résulte que l'indicatrice en chaque point est l'une quelconque des sections parallèles au plan tangent en ce point. Donc, les ombilics des surfaces du deuxième degré sont les points où le plan tangent est parallèle aux plans des sections circulaires.

Cas où la théorie précédente est en défaut.

316. La loi si remarquable, d'après laquelle varie la courbure des sections normales en un point d'une surface, suppose l'existence d'un plan tangent en ce point, et elle exige aussi que les dérivées partielles r, s, t aient, au même point, des valeurs déterminées. Lorsque le contraire a lieu, notre analyse ne subsiste pas, et la loi des variations de la courbure des sections normales peut être très-différente de celle qui a lieu dans le cas général. J'éclaircirai cela par un exemple.

Considérons la surface représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$(1) \qquad z = \frac{x^2 + y^2}{2f\left(\frac{y}{x}\right)},$$

f étant une fonction donnée. En posant

$$x = \rho \cos\alpha, \quad y = \rho \sin\alpha,$$

dans l'équation (1), on obtient

$$(2) \qquad z = \frac{\rho^2}{2f(\tang\alpha)};$$

ce qui est l'équation de la section faite dans la surface par le plan $y = x \tang\alpha$, z et ρ étant alors les coordonnées; cette section est une parabole dont la tangente à l'origine des coordonnées est située dans le plan xy. Cherchons ce que devient, pour cette origine, l'expression générale des rayons de courbure des sections normales. D'après l'équation (1), z est une fonction homogène du deuxième degré des coordonnées x et y : on a donc, d'après le théorème des fonctions homogènes (n° 136),

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 2z = \frac{x^2 + y^2}{f\left(\frac{y}{x}\right)},$$

Si l'on remplace x et y par $\rho\cos\alpha$ et $\rho\sin\alpha$, puis qu'après avoir divisé par ρ^2 on fasse tendre ρ vers zéro, on aura

$$r\cos^2\alpha + 2s\sin\alpha\cos\alpha + t\sin^2\alpha = \frac{1}{f(\tang\alpha)}.$$

r, s, t ont dans cette formule les valeurs qui conviennent à l'origine des coordonnées, et α représente l'angle que fait avec l'axe des x la tangente des sections normales. L'expression du rayon de courbure (n° 310) devient alors

$$R = f(\tang\alpha),$$

et la loi de ses variations est arbitraire comme la fonction f. Ainsi ce rayon de courbure n'aura plus nécessairement, comme dans le cas général, un maximum unique

et un minimum unique répondant à deux directions perpendiculaires.

La théorie générale ne s'applique pas au cas actuel, parce que, pour $x=0$, $y=0$, les dérivées r, s, t deviennent indéterminées; leurs valeurs dépendent de la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{y}{x}$ quand x et y tendent vers zéro.

De l'enveloppe des plans tangents à une surface aux divers points d'une courbe donnée. — Des tangentes conjuguées.

317. Considérons une courbe tracée sur une surface donnée; le plan tangent à la surface en un point (x, y, z) de la courbe a pour équation

$$(1)\qquad Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

et il est enveloppé par une surface développable qui est déterminée par l'équation (1), jointe à celle qu'on en déduit par la différentiation relative à la variable indépendante, dont dépendent sur la courbe donnée les quantités x, y, z, p, q. A cause de $dz = p\,dx + q\,dy$, la différentiation dont je viens de parler donne

$$(2)\qquad (X - x)\,dp + (Y - y)\,dq = 0.$$

Pour avoir l'arête de rebroussement de la surface développable dont nous nous occupons, il faut différentier l'équation (2), ce qui donnera

$$(3)\qquad (X - x)\,d^2p + (Y - y)\,d^2q - (dx\,dp + dy\,dq) = 0.$$

Les équations simultanées (1), (2), (3) sont renfermées dans la formule

$$(4)\qquad \frac{X - x}{dq} = \frac{Y - y}{-dp} = \frac{Z - z}{p\,dq - q\,dp} = \frac{dp\,dx + dq\,dy}{dq\,d^2p - dp\,d^2q};$$

les valeurs de X, Y, Z tirées de ces équations sont les coordonnées du point de l'arête de rebroussement qui correspond au point (x, y, z). Les équations formées en égalant les trois premiers rapports de la formule (4) équivalent au système des équations (1) et (2) : ce sont celles de la caractéristique. Cette caractéristique et la tangente menée par le point (x, y, z) à la courbe donnée sont dites, d'après Charles Dupin, des *tangentes conjuguées* de la surface.

Désignons par α, 6, γ les angles que forme, avec les axes, la tangente de la courbe donnée; par α', $6'$, γ' ceux que fait, avec les mêmes axes, la tangente conjuguée. Les premiers cosinus sont proportionnels à dx, dy, dz; les autres sont proportionnels à dq, $-dp$, $pdq - qdp$, d'après la formule (4), ou, selon notre notation ordinaire, proportionnels à

$$sdx + tdy, \quad -(rdx + sdy), \quad (ps - qr)dx + (pt - qs)dy;$$

on a donc

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\cos\alpha'}{s\cos\alpha + t\cos 6} &= \frac{\cos 6'}{-(r\cos\alpha + s\cos 6)} \\ &= \frac{\cos\gamma'}{(ps - qr)\cos\alpha + (pt - qs)\cos 6}. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les relations qui existent entre les cosinus relatifs à deux tangentes conjuguées d'une surface.

Si l'on place l'origine des coordonnées en un point de la surface, qu'on prenne pour plan des xy le plan tangent, pour plans des zx et des zy ceux des sections principales, on aura

$$p = 0, \quad q = 0, \quad s = 0,$$
$$\cos\gamma = 0, \quad \cos 6 = \sin\alpha,$$
$$\cos\gamma' = 0, \quad \cos 6' = \sin\alpha',$$

et la formule (5) donnera

$$(6) \qquad \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = -\frac{r}{t}.$$

Cette formule (6) exprime la propriété suivante :

THÉORÈME. — *Deux tangentes conjuguées quelconques sont parallèles à deux diamètres conjugués de l'indicatrice.*

Et il en résulte cette conséquence :

COROLLAIRE. — *La somme algébrique des rayons de courbure des sections normales qui correspondent à deux tangentes conjuguées est constante.*

En effet, les rayons de courbure sont proportionnels aux carrés des diamètres de l'indicatrice, et ces carrés ont une somme ou une différence constante.

Expressions générales des rayons de courbure principaux en un point quelconque d'une surface. — Détermination des ombilics.

318. Reprenons la formule générale

$$(1) \qquad R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos6 + t\cos^2 6},$$

que nous avons établie au n° 309 et qui détermine en grandeur et en direction le rayon de courbure d'une section normale définie par les angles α, 6, γ que fait la tangente avec les axes; rappelons que le choix du signe du radical $\sqrt{1+p^2+q^2}$ détermine le sens dans lequel sont comptés, sur la normale, les rayons de courbure positifs. Les cosinus des angles α, 6, γ doivent satisfaire à la relation

$$(2) \qquad \cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos 6,$$

ainsi qu'à la condition

$$(3)\qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

et l'élimination de $\cos\gamma$ donne

$$(4)\qquad (1+p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1+q^2)\cos^2\beta = 1.$$

Multiplions l'expression de R par le premier membre de la formule (4), afin de la rendre homogène par rapport à $\cos\alpha$ et $\cos\beta$; l'équation (1) pourra alors être écrite comme il suit :

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left(1+p^2-\dfrac{Rr}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos^2\alpha + 2\left(pq-\dfrac{Rs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos\alpha\cos\beta \\ \quad + \left(1+q^2-\dfrac{Rt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos^2\beta = 0. \end{array}\right.$$

319. Cette formule (5) nous donne immédiatement les équations qui déterminent les ombilics de la surface; elle fait connaître effectivement la valeur du rapport $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ qui répond, en un point donné, à une valeur donnée de R. Or, si le point dont il s'agit est un ombilic, la valeur de $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ est indéterminée, et réciproquement; donc on aura les conditions des ombilics en égalant à zéro les coefficients de $\cos^2\alpha$, de $\cos\alpha\cos\beta$ et de $\cos^2\beta$ dans la formule (5). On trouve ainsi

$$(6)\qquad \frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2},$$

et chacun des rapports qui figurent dans cette formule exprime la valeur de $\dfrac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}$, R étant la valeur du rayon de courbure qui convient à l'ombilic.

En général, les deux équations (6) détermineront sur

la surface un nombre d'ombilics limité ou illimité, mais qui ne formeront pas une ligne continue; il peut arriver cependant que les deux équations (5) se réduisent à une seule, en vertu de l'équation de la surface, et alors celle-ci admettra des *lignes ombilicales*.

320. L'équation (5) nous fait connaître aussi les rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface. Effectivement, les deux valeurs du rapport $\frac{\cos\alpha}{\cos 6}$ tirées de l'équation (5) doivent être égales entre elles dans le cas du maximum et dans celui du minimum; exprimant donc cette égalité, on obtiendra l'équation

$$\left(pq - \frac{Rs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2 - \left(1+p^2 - \frac{Rr}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\left(1+q^2 - \frac{Rt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = 0,$$

ou

$$(7)\quad (rt-s^2)R^2 - [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]\sqrt{1+p^2+q^2}\,R + (1+p^2+q^2)^2 = 0,$$

qui a pour racines les rayons de courbure principaux.

Il reste à trouver la valeur du rapport $\frac{\cos\alpha}{\cos 6}$ relative à chacune des sections principales. Or, R désignant actuellement l'une des racines de l'équation (7), l'équation (5) a une racine double, si l'on y considère $\cos\alpha$ ou $\cos 6$ comme l'inconnue; cette racine double satisfera donc à l'équation obtenue en différentiant l'équation (5), soit par rapport à $\cos\alpha$, soit par rapport à $\cos 6$. On a, d'après cela,

$$\left(1+p^2 - \frac{Rr}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos\alpha + \left(pq - \frac{Rs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos 6 = 0,$$

$$\left(pq - \frac{Rs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos\alpha + \left(1+q^2 - \frac{Rt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos 6 = 0,$$

et l'on tire de ces équations

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{r\cos\alpha + s\cos6}{(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos6} = \frac{s\cos\alpha + t\cos6}{pq\cos\alpha + (1+q^2)\cos6} \\ &\qquad = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}; \end{aligned} \right.$$

l'équation formée avec les deux premiers des rapports contenus dans cette formule est du deuxième degré par rapport à $\frac{\cos\alpha}{\cos6}$; elle détermine les valeurs de ce rapport qui conviennent aux deux sections principales. Les équations (2) et (3) permettent de calculer ensuite les valeurs des trois cosinus $\cos\alpha$, $\cos6$, $\cos\gamma$.

L'équation (7) coïncidera avec l'équation (7) du n° 157, si l'on y regarde $\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ comme l'inconnue; on voit ainsi que les centres de courbure des sections principales sont précisément les deux points que nous avons eu à considérer dans la question à laquelle je fais ici allusion.

En désignant par R_1 et R_2 les racines de l'équation (7), on a

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &R_1 + R_2 = \frac{[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]\sqrt{1+p^2+q^2}}{rt - s^2}, \\ &R_1 R_2 = \frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt - s^2}, \end{aligned} \right.$$

et de ces formules (9) on tire

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &(R_1 - R_2)^2 \\ &\quad = \frac{(1+p^2+q^2)(1+p^2)(1+q^2)p^2q^2}{(rt-s^2)^2}\left[\frac{2s}{pq} - \frac{r}{1+q^2} - \frac{t}{1+q^2}\right]^2 \\ &\quad + \frac{(1+p^2+q^2)^2(1+p^2)(1+q^2)}{(rt-s^2)^2}\left[\frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2}\right]^2; \end{aligned} \right.$$

la formule (10) montre que les équations (6) ont nécessairement lieu, lorsque l'équation (7) a ses deux racines égales; on retrouve ainsi les conditions déjà obtenues pour les ombilics.

Détermination des ombilics de l'ellipsoïde.

321. Pour donner un exemple de la théorie précédente, nous l'appliquerons à la recherche des ombilics de l'ellipsoïde. Désignons par ρ, $\sqrt{\rho^2-b^2}$ et $\sqrt{\rho^2-c^2}$ les demi-axes de la surface et supposons $b<c$; son équation sera

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,$$

et l'on en tire, par la différentiation,

$$\frac{x}{\rho^2}+\frac{pz}{\rho^2-c^2}=0,\quad \frac{y}{\rho^2-b^2}+\frac{qz}{\rho^2-c^2}=0;$$

différentiant de nouveau, on obtient

$$rz+(1+p^2)=\frac{c^2}{\rho^2},$$
$$tz+(1+q^2)=\frac{c^2-b^2}{\rho^2-b^2},$$
$$sz+pq=0,$$

d'où l'on tire

$$z[pqr-(1+p^2)s]=\frac{c^2}{\rho^2}pq,$$
$$z[(1+q^2)r-(1+p^2)t]=\frac{b^2(\rho^2-c^2)}{\rho^2(\rho^2-b^2)}+\frac{c^2}{\rho^2}q^2-\frac{c^2-b^2}{\rho^2-b^2}p^2.$$

Les seconds membres de ces formules étant nuls pour les ombilics, on a $p=0$ ou $q=0$; mais l'hypothèse de $p=0$ donnerait, pour q, une valeur imaginaire; on

a donc nécessairement $q = 0$, et il en résulte

$$p = \frac{b\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\rho\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}{c}, \quad x = \pm\frac{b\rho}{c}, \quad y = 0,$$

les radicaux devant être pris avec le double signe $\pm$.

On voit que l'ellipsoïde a quatre ombilics qui sont situés dans le plan principal du plus grand axe et du plus petit, ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit au n° 315.

Des lignes de courbure d'une surface.

322. On nomme *ligne de courbure* d'une surface toute ligne telle que les normales menées à la surface, par ses différents points, appartiennent à une surface développable.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface donnée, et faisons, comme à l'ordinaire,

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy.$$

La normale de la surface au point (x, y, z) aura pour équations

$$(1) \quad (X - x) + p(Z - z) = 0, \quad (Y - y) + q(Z - z) = 0.$$

Maintenant, si les coordonnées x, y, z appartiennent à une ligne de courbure, elles seront, ainsi que p et q, des fonctions d'une même variable; la droite (1) étant alors la tangente de l'arête de rebroussement d'une surface développable ou, ce qui revient au même, la caractéristique de cette surface, elle sera contenue dans le plan mobile enveloppé par la même surface; donc l'équation de ce plan mobile sera

$$(2) \quad [(X - x + p(Z - z)] - \theta[(Y - y) + q(Z - z)] = 0,$$

θ étant une fonction du paramètre ou de la variable dont dépendent les coordonnées x, y, z. Mais, d'après la théorie exposée au n° 283, la caractéristique de l'enveloppe est représentée par l'équation (2), jointe à celle qu'on en déduit par la différentiation relative au paramètre qu'elle renferme; donc cette dernière équation doit devenir identique en vertu des équations (1). En différentiant l'équation (2) et en supprimant le terme en $d\theta$ qui est nul, par les équations (1), il vient

$$[-(dx+p\,dz)+(\text{Z}-z)\,dp]-\theta[-(dy+q\,dz)+(\text{Z}-z)\,dq]=0.$$

Cette équation devant subsister, quel que soit Z, elle se décompose en deux autres, savoir :

$$(3)\qquad \begin{cases} dx+p\,dz=\theta(dy+q\,dz),\\ dp=\theta\,dq,\end{cases}$$

d'où, en éliminant θ,

$$(4)\qquad \frac{dp}{dx+p\,dz}=\frac{dq}{dy+q\,dz};$$

telle est l'équation qui doit avoir lieu, d'après la définition, pour tous les points d'une ligne de courbure.

Remplaçant dz, dp, dq par leurs valeurs, l'équation (4) devient

$$(5)\qquad \frac{r\,dx+s\,dy}{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}=\frac{s\,dx+t\,dy}{pq\,dx+(1+q^2)\,dy},$$

ou

$$(6)\qquad \begin{cases} [(1+q^2)s-pqt]\dfrac{dy^2}{dx^2}+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\dfrac{dy}{dx}\\ \qquad\qquad+[pqr-(1+p^2)s]=0;\end{cases}$$

les dérivées p, q, r, s, t sont des fonctions données des coordonnées x, y, et l'équation (6) est l'*équation différentielle* des projections des lignes de courbure de la surface sur le plan xy.

Pour chaque système de valeurs des coordonnées x et y, l'équation (6) donne deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ ou de $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$; il résulte de là qu'il passe deux lignes de courbure par chaque point de la surface autre qu'un ombilic : dans le cas des ombilics, l'équation (6) se réduit à une identité.

323. L'équation (2) du plan mobile que nous avons considéré devient, à cause de la seconde équation (3),

$$[(X-x)+p(Z-z)]dq-[(Y-y)+q(Z-z)]dp=0,$$

et, pour déterminer l'arête de rebroussement de son enveloppe, il faut joindre à l'équation précédente (n° 283) celles qu'on en déduit par une double différentiation faite dans l'hypothèse de X, Y, Z constantes. Une première différentiation donne, en ayant égard à l'équation (4),

$$[(X-x)+p(Z-z)]d^2q-[(Y-y)+q(Z-z)]d^2p=0.$$

Différentions de nouveau et désignons par $\frac{1}{M}$ la valeur de chacun des membres de la formule (4), il viendra, en ayant égard aux équations précédentes qui équivalent à celles de la normale,

$$(Z-z-M)(dp\,d^2q-dq\,d^2p)=0,$$

d'où

$$Z-z=M.$$

La valeur de Z qu'on obtient ainsi se rapporte au point de contact de la normale avec l'arête de rebroussement. Si l'on désigne par R la partie de cette normale comprise entre le point de contact dont nous venons de parler et la surface, on aura

$$R=\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2},$$

ou, à cause des équations (1),

$$R=\sqrt{1+p^2+q^2}\,(Z-z)=\sqrt{1+p^2+q^2}\,M.$$

Or $\frac{1}{M}$ est la valeur commune des deux membres de la formule (4) ou de ceux de la formule (5); on a donc

$$(7)\quad \frac{r\,dx + s\,dy}{(1+p^2)\,dx + pq\,dy} = \frac{s\,dx + t\,dy}{pq\,dx + (1+q^2)\,dy} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}.$$

Soient α, 6, γ les angles que fait avec les axes la tangente à la ligne de courbure, on aura

$$\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos 6},$$

et la formule précédente deviendra

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{r\cos\alpha + s\cos 6}{(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos 6} &= \frac{s\cos\alpha + t\cos 6}{pq\cos\alpha + (1+q^2)\cos 6} \\ &= \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}. \end{aligned} \right.$$

Les deux équations contenues dans cette formule sont précisément celles qui nous ont servi (n° 320) à déterminer la valeur R du rayon de courbure des sections principales en un point de la surface donnée, ainsi que la valeur du rapport $\frac{\cos\alpha}{\cos 6}$ qui convient à ces sections, les angles α, 6, γ se rapportant à la tangente de la section; on peut donc énoncer ce théorème:

Théorème. — 1° *Les lignes de courbure qui passent par chaque point d'une surface donnée sont tangentes aux sections principales relatives au même point, et par conséquent elles se coupent à angle droit.*

2° *L'arête de rebroussement de la surface développable formée par les normales de la surface aux points d'une ligne de courbure est le lieu géométrique des centres de courbure des sections principales tangentes à la ligne de courbure.*

324. Remarques. — Il est important de remarquer que les rayons de courbure d'une ligne de courbure ne sont pas égaux, en général, à ceux des sections principales tangentes. Si ρ désigne le rayon de courbure d'une ligne de courbure, θ l'angle que fait la direction de ce rayon avec la direction du rayon de courbure R de la section principale, on a

$$\rho = R \cos\theta,$$

comme on l'a vu au n° 308. L'égalité des rayons ρ et R n'a donc lieu que si le plan osculateur de la ligne de courbure passe par la normale de la surface.

Nous avons obtenu l'équation différentielle des projections des lignes de courbure d'une surface sur le plan xy; la recherche de l'équation de ces lignes entre les seules coordonnées exige en général les méthodes qui font l'objet du Calcul intégral. Mais on peut voir dès à présent que les lignes de courbure constituent deux systèmes distincts que l'on nomme *orthogonaux;* ces lignes décomposent effectivement la surface en quadrilatères infiniment petits dans lesquels les quatre angles sont droits. Les courbes auxquelles appartiennent les côtés opposés de ces quadrilatères forment le système des lignes de l'une des courbures et les trajectoires orthogonales de ces courbes constituent le système des lignes de l'autre courbure. Mais, en général, les deux lignes de courbure qui passent par un même point d'une surface ne sont pas *analytiquement distinctes :* elles ne sont en réalité que deux branches d'une même courbe; c'est seulement dans des cas particuliers que les deux systèmes de lignes de courbure peuvent être représentés par des équations distinctes.

Toute ligne tracée sur un plan ou sur une sphère doit être regardée comme une ligne de courbure de cette surface. Dans le premier cas, les normales de la surface me-

nées par les points d'une ligne quelconque forment une surface cylindrique qui est développable; cette ligne satisfait donc à la définition des lignes de courbure. Dans le cas de la sphère, les normales vont concourir en un même point et elles forment une surface conique qui est encore développable. On voit au surplus que l'équation (4) des lignes de courbure est toujours satisfaite dans le cas du plan et dans celui de la sphère. Pour une courbe plane, on a effectivement

$$dp = 0, \quad dq = 0;$$

dans le cas de la sphère,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - a^2 = 0,$$

on a

$$dx + p\,dz + (z - z_0)\,dp = 0 \quad \text{et} \quad dy + q\,dz + (z - z_0)\,dq = 0.$$

Propriétés relatives aux lignes de courbures.

325. Reprenons l'équation

$$\frac{dp}{dx + p\,dz} = \frac{dq}{dy + q\,dz},$$

qui appartient aux lignes de courbure.

Si l'on désigne par α, 6, γ les angles que fait, avec les axes, la tangente d'une ligne tracée sur une surface, par α', $6'$, γ' ceux que la normale de la surface fait avec les mêmes axes, on aura

$$p = -\frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'}, \quad q = -\frac{\cos 6'}{\cos\gamma'},$$

puis

$$\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos 6} = \frac{dz}{\cos\gamma}.$$

L'équation précédente des lignes de courbure devient alors

$$\frac{\cos\gamma'\,d\cos\alpha' - \cos\alpha'\,d\cos\gamma'}{\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha'} = \frac{\cos\gamma'\,d\cos 6' - \cos 6'\,d\cos\gamma'}{\cos 6\cos\gamma' - \cos\gamma\cos 6'},$$

ou

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}(\cos 6\cos\gamma' - \cos\gamma\cos 6')\,d\cos\alpha'\\ +(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')\,d\cos 6'\\ +(\cos\alpha\cos 6' - \cos 6\cos\alpha')\,d\cos\gamma' = 0.\end{array}\right.$$

On a d'ailleurs

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos 6\cos 6' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,$$
$$\cos^2\alpha' + \cos^2 6' + \cos^2\gamma' = 1,$$

et, par la différentiation,

$$\cos\alpha'\,d\cos\alpha' + \cos 6'\,d\cos 6' + \cos\gamma'\,d\cos\gamma' = 0.$$

En combinant cette dernière identité avec l'équation (1), on obtient

$$(2)\qquad \frac{d\cos\alpha'}{\cos\alpha} = \frac{d\cos 6'}{\cos 6} = \frac{d\cos\gamma'}{\cos\gamma}.$$

Ainsi, pour qu'une courbe donnée, tracée sur une surface, soit ligne de courbure de cette surface, il faut et il suffit que la tangente de la courbe en chaque point soit parallèle à la droite qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels aux différentielles

$$d\cos\alpha',\quad d\cos 6',\quad d\cos\gamma',$$

α', $6'$, γ' étant les angles formés avec les axes par la normale de la surface.

Posons

$$(3)\qquad d\sigma' = \sqrt{(d\cos\alpha')^2 + (d\cos 6')^2 + (d\cos\gamma')^2},$$

et déterminons trois angles ξ', η', ζ' par les équations

$$(4)\quad d\cos\alpha' = d\sigma'\cos\xi',\quad d\cos 6' = d\sigma'\cos\eta',\quad d\cos\gamma' = d\sigma'\cos\zeta'.$$

Si la courbe proposée est ligne de courbure, les normales de la surface menées par ses différents points seront tangentes à une courbe; dans ce cas $d\sigma'$ est l'angle de contingence de cette dernière courbe et ξ', η', ζ' sont

les angles formés par sa normale principale avec les axes. Dans tous les cas, la direction que déterminent les angles ξ', η', ζ' est perpendiculaire à la normale de la surface, et par suite elle est dans le plan tangent; car l'équation

$$\cos^2\alpha' + \cos^2 6' + \cos^2\gamma' = 1$$

donne, par la différentiation, à cause des formules précédentes,

$$\cos\alpha'\cos\xi' + \cos 6'\cos\eta' + \cos\gamma'\cos\zeta' = 0.$$

Soient encore λ', μ', ν' les angles formés avec les axes par une droite perpendiculaire à la normale de la surface et à la direction qui répond aux angles ξ', η', ζ'; les cosinus des angles ξ', η', ζ' étant proportionnels à $d\cos\alpha'$, $d\cos 6'$, $d\cos\gamma'$, ils le sont aussi, d'après le calcul du n° 273, aux différentielles $d\cos\lambda'$, $d\cos\mu'$, $d\cos\nu'$. Si donc on pose

$$(5) \qquad d\tau' = \sqrt{(d\cos\lambda')^2 + (d\cos\mu')^2 + (d\cos\nu')^2},$$

on aura

$$(6) \qquad d\cos\lambda' = \cos\xi' d\tau', \quad d\cos\mu' = \cos\eta' d\tau', \quad d\cos\nu' = \cos\zeta' d\tau'.$$

Cela posé, désignons généralement par ω l'angle formé par la tangente de la courbe donnée avec la direction qui répond aux angles ξ', η', ζ'; par θ l'angle que fait la normale de la surface avec le plan osculateur de la courbe. Soient d'ailleurs, pour cette dernière courbe, conformément à nos notations habituelles, ξ, η, ζ et λ, μ, ν les angles formés avec les axes par la normale principale et par l'axe du plan osculateur, $d\sigma$ et $d\tau$ les angles de contingence relatifs à la première et à la seconde courbure. Les droites qui font avec les axes les angles

$$\begin{matrix} \alpha', & 6', & \gamma', \\ \xi', & \eta', & \zeta', \\ \lambda', & \mu', & \nu' \end{matrix}$$

forment un système rectangulaire, et les cosinus des angles formés avec ces trois droites, par la tangente, la normale principale et l'axe du plan osculateur de la courbe donnée, sont respectivement

$$\begin{array}{lll} 0, & \cos\omega, & \sin\omega, \\ \cos\theta, & \pm\sin\theta\sin\omega, & \mp\sin\theta\cos\omega, \\ \sin\theta, & \mp\cos\theta\sin\omega, & \pm\cos\theta\cos\omega; \end{array}$$

mais comme on passe des signes inférieurs aux supérieurs en changeant ω en $\omega+\pi$ et en substituant, à la direction d'abord choisie de la tangente à la courbe, la direction opposée, nous admettrons les signes supérieurs, et l'on aura en conséquence les formules suivantes :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0, \\ \cos\alpha\cos\xi' + \cos\beta\cos\eta' + \cos\gamma\cos\zeta' = \cos\omega, \\ \cos\alpha\cos\lambda' + \cos\beta\cos\mu' + \cos\gamma\cos\nu' = \sin\omega; \end{array}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos\xi\cos\alpha' + \cos\eta\cos\beta' + \cos\zeta\cos\gamma' = \cos\theta, \\ \cos\xi\cos\xi' + \cos\eta\cos\eta' + \cos\zeta\cos\zeta' = +\sin\theta\sin\omega, \\ \cos\xi\cos\lambda' + \cos\eta\cos\mu' + \cos\zeta\cos\nu' = -\sin\theta\cos\omega; \end{array}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos\lambda\cos\alpha' + \cos\mu\cos\beta' + \cos\nu\cos\gamma' = \sin\theta, \\ \cos\lambda\cos\xi' + \cos\mu\cos\eta' + \cos\nu\cos\zeta' = -\cos\theta\sin\omega, \\ \cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu' = +\cos\theta\cos\omega. \end{array}\right.$$

Si l'on différentie la première et la troisième équation (7), puis la première équation (8), en faisant usage, pour cet objet, de nos formules du n° **274**, il viendra, en ayant égard à toutes les précédentes équations,

$$(10)\qquad \cos\omega\, d\sigma' + \cos\theta\, d\sigma = 0,$$

$$(11)\qquad d\tau' = d\omega + \sin\theta\, d\sigma,$$

$$(12)\qquad d\tau = d\theta + \sin\omega\, d\sigma',$$

et, à cause de la formule (10), la formule (12) donne

$$(13)\qquad d\tau = d\theta - \cos\theta \operatorname{tang}\omega\, d\sigma.$$

326. Les formules (10), (11), (12), (13) conviennent à une courbe quelconque tracée sur une surface. Nous avons vu que la condition des lignes de courbure est $\sin\omega = 0$; cette condition se réduit donc à

$$d\tau = d\theta,$$

d'après la formule (13), ce qui donne le théorème remarquable de Lancret, savoir :

Théorème I. — *Pour qu'une courbe plane tracée sur une surface soit ligne de courbure de cette surface, il faut et il suffit que l'angle de torsion de la courbe soit égal à la différentielle de l'angle formé par le plan osculateur de celle-ci avec la normale de la surface.*

Si l'on a $d\tau = 0$, il en résulte $d\theta = 0$, d'où $\theta = \text{const.}$, et réciproquement; on a donc cette autre proposition :

Corollaire. — *Pour qu'une courbe plane tracée sur une surface soit ligne de courbure de la surface, il faut et il suffit que le plan de la courbe coupe la surface partout sous le même angle.*

Si la courbe proposée est une ligne de courbure plane de la surface, on a $\sin\omega = 0$, $d\omega = 0$ et $d\theta = 0$; alors les équations (10) et (11) donnent par la division

$$\frac{d\tau'}{d\sigma'} = -\tang\theta = \text{const.}$$

On a donc ce théorème :

Théorème II. — *Si une ligne de courbure d'une surface est plane, les normales de la surface aux points de la ligne de courbure forment une surface développable dont l'arête de rebroussement jouit de la propriété que ses deux courbures ont un rapport constant. Cette arête de rebroussement est donc une hélice tracée sur un cylindre à base quelconque* (n° 301).

327. Considérons maintenant une courbe appartenant à deux surfaces ; on aura, par la formule (13) du n° 325,

$$d\tau = d\theta - \cos\theta \tang\omega \, d\sigma,$$
$$d\tau = d\theta_1 - \cos\theta_1 \tang\omega_1 \, d\sigma,$$

en dénotant par θ_1, ω_1 les quantités analogues à θ, ω, et relatives à la deuxième surface. On tire de là

$$d(\theta_1 - \theta) = (\cos\theta_1 \tang\omega_1 - \cos\theta \tang\omega)\, d\sigma;$$

les angles θ et θ_1 sont situés dans le même plan, comptés tous les deux, dans le même sens, à partir de la normale principale de la courbe donnée ; donc la différence $\theta_1 - \theta$ exprime l'angle que les deux surfaces font entre elles ; d'ailleurs l'équation

$$\sin\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \sin\omega_1 = 0$$

est la condition pour que la courbe considérée soit ligne de courbure de la première ou de la seconde surface. On a donc ce théorème :

Théorème III. — *Si l'intersection de deux surfaces est une ligne de courbure de chacune d'elles, ces surfaces se coupent partout sous le même angle. Réciproquement, si deux surfaces se coupent partout sous le même angle et que l'intersection soit une ligne de courbure de l'une des surfaces, elle est aussi ligne de courbure de l'autre surface.*

Et, comme une ligne plane ou sphérique est ligne de courbure du plan ou de la sphère qui la contient, on a ce corollaire, qui comprend celui du théorème I (n° 326) :

Corollaire I. — *Pour qu'une courbe plane ou sphérique tracée sur une surface donnée soit une ligne de courbure de la surface, il faut et il suffit que le plan ou la sphère qui contient la courbe coupe la surface partout sous le même angle.*

Les plans tangents à une surface développable font partout avec la surface un angle nul, et ils contiennent la génératrice. On a donc cette autre proposition :

COROLLAIRE II. — *Les génératrices d'une surface développable sont des lignes de courbure de cette surface.*

328. On peut établir facilement le théorème III sans recourir aux formules du n° 325. Effectivement, considérons deux surfaces pour lesquelles on a respectivement

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dz = p_1\,dx + q_1\,dy.$$

Ces deux équations ont lieu simultanément pour l'intersection des deux surfaces, et l'on en tire

$$\frac{dx}{q - q_1} = \frac{dy}{p_1 - p} = \frac{dz}{qp_1 - pq_1};$$

désignons par dt chacun de ces trois rapports égaux, et posons

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \mathrm{P}, \quad \frac{dy + q\,dz}{dq} = \mathrm{Q},$$

$$\frac{dx + p_1\,dz}{dp_1} = \mathrm{P}_1, \quad \frac{dy + q_1\,dz}{dq_1} = \mathrm{Q}_1,$$

on aura

$$\frac{\mathrm{P}\,dp}{dt} = q(1 + pp_1 + qq_1) - q_1(1 + p^2 + q^2),$$

$$\frac{\mathrm{Q}\,dq}{dt} = p_1(1 + p^2 + q^2) - p(1 + pp_1 + qq_1).$$

Si donc on fait

$$\mathrm{V} = \frac{1 + pp_1 + qq_1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}},$$

on aura

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{Q\,dq}{dt\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}\,(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial V}{\partial q} = -\frac{P\,dp}{dt\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}\,(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$\frac{\partial V}{\partial p}dp + \frac{\partial V}{\partial q}dq = (Q-P)\frac{dp\,dq}{\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}\,(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}\,dt};$$

on aura évidemment aussi

$$\frac{\partial V}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial V}{\partial q_1}dq_1 = (Q_1-P_1)\frac{dp_1\,dq_1}{\sqrt{1+p^2+q^2}\,(1+p_1^2+q_1^2)^{\frac{3}{2}}\,dt},$$

et, en ajoutant,

$$dV = \frac{\frac{Q-P}{1+p^2+q^2}\,dp\,dq + \frac{Q_1-P_1}{1+p_1^2+q_1^2}\,dp_1\,dq_1}{dt\sqrt{1+p^2+q^2}\,\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}}.$$

On voit, par cette formule, que si deux des quantités

$$dV, \quad Q-P, \quad Q_1-P_1$$

sont nulles, la troisième est nulle aussi; ce qui est précisément la proposition que nous voulions établir.

De la surface dont tous les points sont des ombilics.

329. Si l'on désigne par X, Y, Z les cosinus des angles que fait avec trois axes rectangulaires la normale d'une surface, on a

$$X = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Y = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

d'où

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{pqs - (1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{pqt - (1+q^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{pqr - (1+p^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{pqs - (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les équations

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2},$$

qui déterminent (n° 319) les ombilics des surfaces, équivalent donc aux suivantes :

$$(1) \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y},$$

lesquelles se réduisent à deux distinctes.

Il est facile de démontrer, par ces formules, que la sphère est la seule surface dont chaque point soit un ombilic. En effet, pour une telle surface, les équations (1) ont lieu en chaque point; les deux premières expriment que le cosinus X est indépendant de y et que Y est indépendant de x; en d'autres termes, X est fonction de x seule, Y de y seule; en outre, les dérivées $\frac{\partial X}{\partial x}$ et $\frac{\partial Y}{\partial y}$ étant égales, leur valeur est nécessairement une constante $\frac{1}{a}$; on a donc

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{a}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{a};$$

par conséquent, X et Y ont des valeurs de la forme

$$X = \frac{x - x_0}{a}, \quad Y = \frac{y - y_0}{a},$$

x_0 et y_0 étant des constantes; le cosinus Z sera dès lors

$$Z = \frac{\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}{a}.$$

Maintenant, les valeurs de p et q étant $\frac{-X}{Z}$, $\frac{-Y}{Z}$, la formule $dz = p\,dz + q\,dy$ devient

$$(2) \qquad dz = -\frac{(x - x_0)\,dx + (y - y_0)\,dy}{\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}.$$

Le second membre de cette formule est la différentielle totale de $\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$; on a donc, en désignant par z_0 une nouvelle constante,

$$z - z_0 = \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2},$$

ou

$$(3) \qquad (x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2,$$

ce qui est bieu l'équation de la sphère.

Des systèmes triples de surfaces orthogonales.

330. Désignons par x, y, z des coordonnées rectangulaires, par ρ, μ, ν trois paramètres variables par f, f_1, f_2 des fonctions données. Chacune des équations

$$(1) \qquad \rho = f(x, y, z), \quad \mu = f_1(x, y, z), \quad \nu = f_2(x, y, z)$$

représentera une famille de surfaces, et ces trois familles constitueront un *système triple* de surfaces. Si l'on imagine que les équations (1) soient résolues par rapport à x, y, z, de manière que l'on ait

$$(2) \qquad x = F(\rho, \mu, \nu), \quad y = F_1(\rho, \mu, \nu), \quad z = F_2(\rho, \mu, \nu),$$

les divers points de l'espace seront déterminés par les trois variables ρ, μ, ν, auxquelles on a donné le nom général de *coordonnées curvilignes*.

Il importe de remarquer surtout le cas où les surfaces de chacune des trois familles qui composent le système triple sont coupées à angle droit par toutes les surfaces des deux autres familles. Un tel système est dit *orthogonal*.

Posons

$$(3)\quad \begin{cases} P^2 = \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2, \\ M^2 = \left(\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2, \\ N^2 = \left(\dfrac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\nu}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\nu}{\partial z}\right)^2; \end{cases}$$

les normales des trois surfaces au point (x, y, z) forment avec les axes coordonnés des angles qui ont respectivement pour cosinus

$$\frac{1}{P}\frac{\partial\rho}{\partial x},\quad \frac{1}{P}\frac{\partial\rho}{\partial y},\quad \frac{1}{P}\frac{\partial\rho}{\partial z},$$
$$\frac{1}{M}\frac{\partial\mu}{\partial x},\quad \frac{1}{M}\frac{\partial\mu}{\partial y},\quad \frac{1}{M}\frac{\partial\mu}{\partial z},$$
$$\frac{1}{N}\frac{\partial\nu}{\partial x},\quad \frac{1}{N}\frac{\partial\nu}{\partial y},\quad \frac{1}{N}\frac{\partial\nu}{\partial z};$$

par conséquent, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système triple de surfaces soit orthogonal sont

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial x}\dfrac{\partial\mu}{\partial x} + \dfrac{\partial\rho}{\partial y}\dfrac{\partial\mu}{\partial y} + \dfrac{\partial\rho}{\partial z}\dfrac{\partial\mu}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial x}\dfrac{\partial\nu}{\partial x} + \dfrac{\partial\rho}{\partial y}\dfrac{\partial\nu}{\partial y} + \dfrac{\partial\rho}{\partial z}\dfrac{\partial\nu}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial x}\dfrac{\partial\nu}{\partial x} + \dfrac{\partial\mu}{\partial y}\dfrac{\partial\nu}{\partial y} + \dfrac{\partial\mu}{\partial z}\dfrac{\partial\nu}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

331. On peut éliminer deux des fonctions ρ, μ, ν entre les équations (4) et celles qu'on en déduit par la différentiation ; le résultat de cette élimination est une équation aux dérivées partielles du troisième ordre. Voici comment

on peut établir cet important théorème, dû à M. Ossian Bonnet. Les deux dernières équations (4) donnent

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} K\frac{\partial\nu}{\partial x} &= \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z} - \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial y}, \\ K\frac{\partial\nu}{\partial y} &= \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x} - \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial z}, \\ K\frac{\partial\nu}{\partial z} &= \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}, \end{aligned} \right.$$

formules où K a la valeur $\frac{MP}{N}$. Il est évident d'ailleurs que, si l'on ajoute les trois quantités

$$\frac{\partial\left(K\frac{\partial\nu}{\partial y}\right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(K\frac{\partial\nu}{\partial z}\right)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\left(K\frac{\partial\nu}{\partial z}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(K\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\left(K\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(K\frac{\partial\nu}{\partial y}\right)}{\partial x},$$

après les avoir multipliées respectivement par $\frac{\partial\nu}{\partial x}, \frac{\partial\nu}{\partial y}, \frac{\partial\nu}{\partial z}$, on obtiendra une somme nulle; on a donc, par les formules (5),

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\nu}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x} - \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\right] \\ +&\frac{\partial\nu}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z} - \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\right] \\ +&\frac{\partial\nu}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z} - \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x} - \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)\right] = 0. \end{aligned}$$

Si l'on effectue les différentiations et qu'on ajoute à

l'équation obtenue les deux dernières équations (4) multipliées respectivement par

$$+\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}\right) \quad \text{et} \quad -\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}\right),$$

il viendra

$$(6)\begin{cases} \dfrac{\partial\nu}{\partial x}\left[\dfrac{\partial\rho}{\partial x}\dfrac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+\dfrac{\partial\rho}{\partial y}\dfrac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\dfrac{\partial^2\mu}{\partial x\partial z}-\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x\partial z}\right]\\ +\dfrac{\partial\nu}{\partial y}\left[\dfrac{\partial\rho}{\partial x}\dfrac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial\rho}{\partial y}\dfrac{\partial^2\mu}{\partial y^2}+\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\dfrac{\partial^2\mu}{\partial y\partial z}-\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\dfrac{\partial\mu}{\partial y}-\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial y\partial z}\right]\\ +\dfrac{\partial\nu}{\partial z}\left[\dfrac{\partial\rho}{\partial x}\dfrac{\partial^2\mu}{\partial x\partial z}+\dfrac{\partial\rho}{\partial y}\dfrac{\partial^2\mu}{\partial y\partial z}+\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\dfrac{\partial^2\mu}{\partial z^2}-\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x\partial z}-\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial y\partial z}-\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial z^2}\right]=0. \end{cases}$$

On peut chasser de cette équation les dérivées du second ordre de la fonction μ. On a, en effet, en différentiant la première des équations (4) par rapport à chacune des variables x, y, z,

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial z}=-\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial z},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial^2\mu}{\partial y\partial z}=-\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}-\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial z},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial^2\mu}{\partial y\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}=-\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial z}-\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial z}-\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}.$$

Au moyen de ces formules et des formules (5), qui permettent d'éliminer les dérivées de ν, l'équation (6) devient

$$(7)\begin{cases} \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial y}\dfrac{\partial\mu}{\partial z}-\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x\partial z}\right)\\ +\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\dfrac{\partial\mu}{\partial x}-\dfrac{\partial\rho}{\partial x}\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\right)\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial y^2}+\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial y\partial z}\right)\\ +\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial x}\dfrac{\partial\mu}{\partial y}-\dfrac{\partial\rho}{\partial y}\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x\partial z}+\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial y\partial z}+\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial z^2}\right)=0, \end{cases}$$

ou

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &A\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 + B\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2 + C\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2 \\ &\qquad + A'\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z} + B'\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x} + C'\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0,\end{aligned}\right.$$

en faisant, pour abréger,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} A &= \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial^2\rho}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial^2\rho}{\partial x\,\partial z},\\ B &= \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial^2\rho}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial^2\rho}{\partial y\,\partial x},\\ C &= \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial^2\rho}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial^2\rho}{\partial y\,\partial z},\\ A' &= \frac{\partial\rho}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial^2\rho}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial^2\rho}{\partial x\,\partial z}\right),\\ B' &= \frac{\partial\rho}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial^2\rho}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial^2\rho}{\partial x\,\partial y}\right),\\ C' &= \frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial^2\rho}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial^2\rho}{\partial y\,\partial z}\right).\end{aligned}\right.$$

Nous avons donc deux équations qui ne renferment pas la fonction ν et qui ne contiennent que les dérivées du premier ordre de μ, savoir la première équation (4) et l'équation (8). Ces deux équations sont homogènes par rapport aux dérivées $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$, $\frac{\partial\mu}{\partial z}$; on pourra donc en tirer les rapports de deux de ces dérivées à la troisième, en sorte que l'on aura

$$\frac{\frac{\partial\mu}{\partial x}}{\mathcal{A}} = \frac{\frac{\partial\mu}{\partial y}}{\mathcal{B}} = \frac{\frac{\partial\mu}{\partial z}}{\mathcal{C}},$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ étant des fonctions connues des dérivées du premier et du deuxième ordre de la fonction ρ. On aura,

d'après cela,

$$(10)\qquad H\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mathcal{A},\quad H\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mathcal{B},\quad H\frac{\partial\mu}{\partial z}=\mathcal{C}.$$

L'élimination de μ peut se faire par le procédé employé plus haut à l'égard de ν. Si l'on ajoute les trois quantités

$$\frac{\partial\left(H\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(H\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\left(H\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(H\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\left(H\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(H\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)}{\partial x},$$

après les avoir multipliées respectivement par

$$\frac{\partial\mu}{\partial x},\quad \frac{\partial\mu}{\partial y},\quad \frac{\partial\mu}{\partial z},$$

on obtiendra une somme identiquement nulle, et par conséquent on a, par les équations (10),

$$(11)\quad \mathcal{A}\left(\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z}-\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial y}\right)+\mathcal{B}\left(\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}-\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}\right)+\mathcal{C}\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}-\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}\right)=0.$$

Cette équation (11) ne renferme que les dérivées du premier, du deuxième et du troisième ordre de la fonction ρ. On a ainsi ce théorème :

THÉORÈME. — *Pour que l'équation $\rho=f(x, y, z)$ puisse représenter l'une des familles d'un système triple orthogonal, il faut que la fonction ρ satisfasse à une certaine équation aux dérivées partielles du troisième ordre.*

332. Supposons qu'on prenne pour variables indépendantes les paramètres ρ, μ, ν d'un système triple ortho-

gonal; les dérivées partielles de x, y, z, relatives à ρ, μ, ν, s'obtiendront très-aisément en fonction des dérivées partielles de ρ, μ, ν, relatives à x, y, z. Effectivement, si dans la formule

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial x}{\partial \nu} d\nu$$

on remplace $d\rho$, $d\mu$, $d\nu$ par leurs valeurs

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

il viendra, en égalant de part et d'autre les coefficients de dx, dy, dz,

$$1 = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial \nu}{\partial x},$$
$$0 = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial \nu}{\partial y},$$
$$0 = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial \nu}{\partial z}.$$

Ajoutons ces équations, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z}$, puis par $\frac{\partial \mu}{\partial x}, \frac{\partial \mu}{\partial y}, \frac{\partial \mu}{\partial z}$, puis enfin par $\frac{\partial \nu}{\partial x}, \frac{\partial \nu}{\partial y}, \frac{\partial \nu}{\partial z}$, il viendra, à cause des formules (3) et (4),

$$(12) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x} = P^2 \frac{\partial x}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = M^2 \frac{\partial x}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial x} = N^2 \frac{\partial x}{\partial \nu}.$$

On trouve de la même manière

$$(13) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial y} = P^2 \frac{\partial y}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = M^2 \frac{\partial y}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial y} = N^2 \frac{\partial y}{\partial \nu},$$

$$(14) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial z} = P^2 \frac{\partial z}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial z} = M^2 \frac{\partial z}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial z} = N^2 \frac{\partial z}{\partial \nu},$$

et de ces formules combinées avec les formules (3) et (4)

on tire

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{P^2} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2, \\ \dfrac{1}{M^2} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2; \\ \dfrac{1}{N^2} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2. \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \rho}\dfrac{\partial x}{\partial \mu} + \dfrac{\partial y}{\partial \rho}\dfrac{\partial y}{\partial \mu} + \dfrac{\partial z}{\partial \rho}\dfrac{\partial z}{\partial \mu} = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \rho}\dfrac{\partial x}{\partial \nu} + \dfrac{\partial y}{\partial \rho}\dfrac{\partial y}{\partial \nu} + \dfrac{\partial z}{\partial \rho}\dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \mu}\dfrac{\partial x}{\partial \nu} + \dfrac{\partial y}{\partial \mu}\dfrac{\partial y}{\partial \nu} + \dfrac{\partial z}{\partial \mu}\dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0. \end{cases}$$

333. Les équations (15) et (16) expriment simplement les relations qui existent entre les cosinus des angles formés avec les axes par trois directions rectangulaires, et l'on peut en conclure, par la différentiation, un grand nombre d'autres relations qui expriment autant de propriétés des systèmes orthogonaux. Cette analyse n'offre aucune difficulté, et elle conduit à des résultats importants; mais, pour ne pas sortir des limites que je me suis fixées, je me bornerai à établir ici les formules qui expriment les dérivées

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \rho\, \partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \rho\, \partial \nu}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \mu\, \partial \nu}, \quad \ldots$$

en fonction des dérivées du premier ordre des variables x, y, z et des quantités P, M, N.

A cet effet, différentions la première équation (15) par rapport à μ, et la deuxième par rapport à ρ; on aura

$$\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho\, \partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial^2 y}{\partial \rho\, \partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\, \partial \mu} = -\frac{1}{P^2}\frac{\partial \log P}{\partial \mu},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho\, \partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial^2 y}{\partial \rho\, \partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\, \partial \mu} = -\frac{1}{M^2}\frac{\partial \log M}{\partial \rho}.$$

Différentions ensuite les équations (16) par rapport à ν, μ, ρ respectivement; ajoutons les deux dernières équations obtenues et retranchons la première, on aura

$$\frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho\,\partial \mu}+\frac{\partial y}{\partial \nu}\frac{\partial^2 y}{\partial \rho\,\partial \mu}+\frac{\partial z}{\partial \nu}\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \mu}=0.$$

Maintenant, si l'on ajoute les trois équations précédentes après les avoir multipliées respectivement par $\frac{\partial x}{\partial \rho}$, $\frac{\partial x}{\partial \mu}$, $\frac{\partial x}{\partial \nu}$, puis par $\frac{\partial y}{\partial \rho}$, $\frac{\partial y}{\partial \mu}$, $\frac{\partial y}{\partial \nu}$, puis enfin par $\frac{\partial z}{\partial \rho}$, $\frac{\partial z}{\partial \mu}$, $\frac{\partial z}{\partial \nu}$, il viendra, en ayant égard aux formules (15) et (16),

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho\,\partial \mu}&=-\frac{\partial \log P}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \rho}-\frac{\partial \log M}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \mu},\\ \frac{\partial^2 y}{\partial \rho\,\partial \mu}&=-\frac{\partial \log P}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial \rho}-\frac{\partial \log M}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \mu},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \mu}&=-\frac{\partial \log P}{\partial \mu}\frac{\partial z}{\partial \rho}-\frac{\partial \log M}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \mu}.\end{aligned}\right.$$

Ces formules (17) donnent, par des changements de lettres, les valeurs des six autres dérivées

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \rho\,\partial \nu},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial \rho\,\partial \nu},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \nu},$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial \mu\,\partial \nu},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial \mu\,\partial \nu},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial \mu\,\partial \nu}.$$

Théorème de Dupin sur les surfaces orthogonales.

334. On doit à Charles Dupin le beau théorème suivant :

Théorème. — *Dans tout système triple orthogonal, chacune des surfaces qui composent l'une des familles est coupée suivant ces lignes de courbure par les diverses surfaces des deux autres familles.*

La démonstration de ce théorème est contenue dans les équations (17) du numéro précédent. Effectivement, ces équations peuvent être renfermées dans une même formule, savoir :

$$\frac{\dfrac{\partial\left(\mathrm{P}\dfrac{\partial x}{\partial\rho}\right)}{\partial\mu}}{\dfrac{\partial x}{\partial\mu}} = \frac{\dfrac{\partial\left(\mathrm{P}\dfrac{\partial y}{\partial\rho}\right)}{\partial\mu}}{\dfrac{\partial y}{\partial\mu}} = \frac{\dfrac{\partial\left(\mathrm{P}\dfrac{\partial z}{\partial\rho}\right)}{\partial\mu}}{\dfrac{\partial z}{\partial\mu}} = -\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\rho}.$$

Considérons l'intersection C de deux surfaces appartenant aux deux familles pour lesquelles on a respectivement

$$\rho = \text{const.}, \quad \nu = \text{const.};$$

les dérivées $\dfrac{\partial x}{\partial\mu}, \dfrac{\partial y}{\partial\mu}, \dfrac{\partial z}{\partial\mu}$ sont proportionnelles aux cosinus des angles que fait avec les axes la tangente de la courbe C; d'un autre côté, les quantités $\mathrm{P}\dfrac{\partial x}{\partial\rho}$, $\mathrm{P}\dfrac{\partial y}{\partial\rho}$, $\mathrm{P}\dfrac{\partial z}{\partial\rho}$, ou $\dfrac{1}{\mathrm{P}}\dfrac{\partial\rho}{\partial x}, \dfrac{1}{\mathrm{P}}\dfrac{\partial\rho}{\partial y}, \dfrac{1}{\mathrm{P}}\dfrac{\partial\rho}{\partial z}$, sont les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à la surface ρ, et leurs différentielles

$$\frac{\partial\left(\mathrm{P}\dfrac{\partial x}{\partial\rho}\right)}{\partial\mu}d\mu, \quad \frac{\partial\left(\mathrm{P}\dfrac{\partial y}{\partial\rho}\right)}{\partial\mu}d\mu, \quad \frac{\partial\left(\mathrm{P}\dfrac{\partial z}{\partial\rho}\right)}{\partial\mu}d\mu,$$

relatives à un déplacement sur la courbe C, sont proportionnelles, d'après notre formule, aux cosinus des angles qui se rapportent à la tangente de C. Or cette proportionnalité est précisément la condition pour que C soit ligne de courbure de la surface ρ (n° 325); le théorème de Dupin se trouve donc établi.

Des systèmes triples de surfaces orthogonales du deuxième degré.

335. Parmi les systèmes triples de surfaces orthogonales, il faut remarquer surtout celui qui est formé de surfaces du deuxième degré homofocales. Les équations de ces surfaces sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,\\ &\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1,\\ &\frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=1,\end{aligned}\right.$$

b et c étant des lignes données; nous supposerons $b < c$.

Si l'on donne au paramètre ρ^2 des valeurs supérieures à c^2, au paramètre μ^2 des valeurs comprises entre b^2 et c^2; enfin au paramètre ν^2 des valeurs inférieures à b^2, la première des équations précédentes représentera des ellipsoïdes, la deuxième des hyperboloïdes à une nappe, et la troisième des hyperboloïdes à deux nappes. Toutes les surfaces du système sont concentriques et leurs sections principales ont les mêmes foyers; aussi dit-on que les surfaces sont homofocales,

Les équations (1) étant du premier degré par rapport à x^2, y^2, z^2, il est facile de les résoudre, et l'on arrive rapidement au résultat en opérant comme il suit : si l'on ordonne par rapport aux puissances de ρ^2 la première des équations (1), il vient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho^6-(b^2+c^2+x^2+y^2+z^2)\rho^4\\ &\quad+[b^2c^2+(b^2+c^2)x^2+c^2y^2+b^2z^2]\rho^2-b^2c^2x^2=0.\end{aligned}\right.$$

Comme les deux dernières équations (1) se déduisent de

la première, par le changement de ρ^2 en μ^2 et en ν^2, l'équation (2), qui est du troisième degré en ρ^2, admet les trois racines ρ^2, μ^2, ν^2; on a donc

$$(3)\quad \begin{cases} \rho^2+\mu^2+\nu^2=x^2+y^2+z^2+b^2+c^2, \\ \rho^2\mu^2+\mu^2\nu^2+\rho^2\nu^2=b^2c^2+(b^2+c^2)x^2+c^2y^2+b^2z^2, \\ \rho^2\mu^2\nu^2=b^2c^2x^2. \end{cases}$$

La dernière équation (3) donne la valeur de x^2; or les équations (1) ne changent pas quand on permute les lettres x et y, pourvu qu'on remplace ensuite b^2 et c^2 par $-b^2$ et c^2-b^2, puis ρ^2, μ^2, ν^2 par ρ^2-b^2, μ^2-b^2, ν^2-b^2; les mêmes équations ne changent pas quand on permute x^2 et z^2, pourvu qu'on remplace b^2 et c^2 par $-(c^2-b^2)$ et $-c^2$, ρ^2, μ^2, ν^2 par ρ^2-c^2, μ^2-c^2, ν^2-c^2; on peut donc faire les mêmes changements dans les équations (3), et la dernière équation de ce système donnera

$$(4)\quad \begin{cases} (\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)=b^2(c^2-b^2)y^2, \\ (\rho^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)=c^2(c^2-b^2)z^2. \end{cases}$$

On a ainsi

$$(5)\quad \begin{cases} x=\dfrac{\rho\mu\nu}{bc}, \\ y=\dfrac{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}, \\ z=\dfrac{\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}. \end{cases}$$

Les quantités ν, $\sqrt{b^2-\nu^2}$, $\sqrt{\mu^2-b^2}$ et $\sqrt{c^2-\mu^2}$ passant par zéro, il faut admettre qu'elles changent de signe, et cela est nécessaire pour que les formules (5) puissent donner tous les points de l'espace. On évitera la difficulté qui peut résulter de l'ambiguïté des signes en introduisant

deux angles ψ et φ tels, que l'on ait

$$\nu = b\cos\psi,\quad \sqrt{b^2-\nu^2} = b\sin\psi,$$
$$\sqrt{\mu^2-b^2} = \sqrt{c^2-b^2}\cos\varphi,\quad \sqrt{c^2-\mu^2} = \sqrt{c^2-b^2}\sin\varphi.$$

On tire des équations (5)

$$\frac{\partial x}{\partial\rho} = \frac{\mu\nu}{bc},\quad \frac{\partial y}{\partial\rho} = \frac{\rho\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\rho^2-b^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial\rho} = \frac{\rho\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}},$$
$$\frac{\partial x}{\partial\mu} = \frac{\rho\nu}{bc},\quad \frac{\partial y}{\partial\mu} = \frac{\mu\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial\mu} = \frac{-\mu\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}},$$
$$\frac{\partial x}{\partial\nu} = \frac{\rho\mu}{bc},\quad \frac{\partial y}{\partial\nu} = \frac{-\nu\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial\nu} = \frac{-\nu\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}},$$

et l'on vérifie immédiatement par ces formules que les équations (1) ou (5) appartiennent effectivement à un système triple orthogonal.

336. Les équations (1) ne cesseront pas de représenter un système triple orthogonal, si l'on y remplace x, y, z, ρ par $\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}, \frac{\rho}{\varepsilon}$, ε étant une constante. Si, après la substitution, on fait $\varepsilon = 0$, les équations (1) deviendront

$$(6)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=\rho^2, \\ \dfrac{x^2}{\mu^2}+\dfrac{y^2}{\mu^2-b^2}-\dfrac{z^2}{c^2-\mu^2}=0, \\ \dfrac{x^2}{\nu^2}-\dfrac{y^2}{\nu^2-b^2}-\dfrac{z^2}{c^2-\nu^2}=0; \end{cases}$$

ce nouveau système est formé d'une famille de sphères concentriques et de deux familles de cônes du second degré, ayant leur sommet au centre des sphères. En faisant, dans les formules (5), la même substitution que dans les

formules (1), il vient

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\rho\mu\nu}{bc},\\ y &= \frac{\rho\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}},\\ z &= \frac{\rho\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}. \end{aligned}\right.$$

337. Remplaçons dans la première équation (1) x par $x-b$, ce qui revient à transporter l'origine des coordonnées à l'un des foyers communs des sections principales relatives au plan xy; écrivons en même temps $c+b$ au lieu de c, et $\rho+b$ au lieu de ρ, il viendra

$$\frac{(x+\rho)^2}{b\left(1+\frac{\rho}{b}\right)^2} - \frac{2(x+\rho)}{1+\frac{\rho}{b}} + \frac{y^2}{2\rho+\frac{\rho^2}{b}} + \frac{z^2}{2(\rho-c)+\frac{\rho^2-c^2}{b}} = 0;$$

et, si l'on fait tendre b vers l'infini, cette équation se réduira à la limite, à la suivante :

$$\frac{y^2}{4\rho} + \frac{z^2}{4(\rho-c)} = (x+\rho).$$

En opérant de même sur les deux dernières équations (1), on obtiendra des équations limites qui se déduiront de la précédente, par le changement de ρ en μ et en ν. On formera ainsi un nouveau système triple de surfaces orthogonales et homofocales, savoir :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{y^2}{4\rho} + \frac{z^2}{4(\rho-c)} &= x+\rho,\\ \frac{y^2}{4\mu} - \frac{z^2}{4(c-\mu)} &= x+\mu,\\ -\frac{y^2}{-4\mu} - \frac{z^2}{-4(\nu-c)} &= x+\nu. \end{aligned}\right.$$

La longueur constante c étant positive, si l'on donne à ρ des valeurs comprises entre c et $+\infty$, la première des équations (8) représentera des paraboloïdes elliptiques; en donnant à μ des valeurs comprises entre zéro et c, on obtiendra, par la deuxième équation, des paraboloïdes hyperboliques; enfin la troisième équation donnera une nouvelle famille de paraboloïdes elliptiques, si l'on attribue à ν des valeurs négatives quelconques.

Les deux dernières équations (8) se déduisent de la première en remplaçant ρ par μ, puis par ν; en ordonnant cette équation par rapport à ρ, elle devient

$$\rho^3 - (c - x)\rho^2 - \left(\frac{y^2 + z^2}{4} + cx\right)\rho + \frac{cy^2}{4} = 0;$$

on a donc

$$\rho + \mu + \nu = c - x,$$

$$\rho\mu + \mu\nu + \rho\nu = -\left(\frac{y^2 + z^2}{4} + cx\right),$$

$$\rho\mu\nu = -\frac{cy^2}{4},$$

et l'on tire de là

$$(9)\quad \begin{cases} x = c - \rho - \mu - \nu, \\ y = 2\sqrt{-\dfrac{\rho\mu\nu}{c}}, \\ z = 2\sqrt{\dfrac{(\rho - c)(c - \mu)(c - \nu)}{c}}; \end{cases}$$

il est aisé de vérifier, au moyen de ces formules, que le système triple dont nous nous occupons est effectivement orthogonal.

Des lignes de courbure de l'ellipsoïde.

338. Considérons l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$(1)\quad \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

et dont les demi-axes ρ, $\sqrt{\rho^2-b^2}$, $\sqrt{\rho^2-c^2}$ ont des valeurs déterminées. Nous connaissons, par le théorème de Dupin, les lignes de courbure de cette surface. Effectivement, si μ^2 est un paramètre variable compris entre b^2 et c^2, les hyperboloïdes à une nappe, représentés par l'équation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1,$$

détermineront sur l'ellipsoïde un premier système de lignes de courbure; pareillement, ν^2 étant un paramètre variable inférieur à b^2, les lignes de la seconde courbure seront les intersections de l'ellipsoïde et des hyperboloïdes à deux nappes représentés par l'équation

$$(3) \qquad \frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=1.$$

On obtiendra les équations des projections des lignes de courbure sur les plans principaux de la surface en éliminant successivement z^2, y^2, x^2 entre l'équation (1) et chacune des équations (2), (3). On trouve ainsi, pour le premier système,

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{c^2x^2}{\rho^2\mu^2}+\frac{(c^2-b^2)y^2}{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)}=1,\\ &\frac{b^2x^2}{\rho^2\mu^2}+\frac{(c^2-b^2)z^2}{(\rho^2-c^2)(c^2-\nu^2)}=1,\\ &-\frac{b^2y^2}{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)}+\frac{c^2z^2}{(\rho^2-c^2)(c^2-\mu^2)}=1,\end{aligned}\right.$$

et, pour le second système,

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{c^2x^2}{\rho^2\nu^2}-\frac{(c^2-b^2)y^2}{(\rho^2-b^2)(b^2-\nu^2)}=1,\\ &\frac{b^2x^2}{\rho^2\nu^2}+\frac{(c^2-b^2)z^2}{(\rho^2-c^2)(c^2-\nu^2)}=1,\\ &\frac{b^2y^2}{(\rho^2-b^2)(b^2-\nu^2)}+\frac{c^2z^2}{(\rho^2-c^2)(c^2-\nu^2)}=1.\end{aligned}\right.$$

Les lignes de courbure des deux systèmes se projettent donc suivant des ellipses sur le plan xz qui est celui du grand axe et du petit axe ; sur les plans xy et yz qui contiennent l'axe moyen de l'ellipsoïde avec le grand axe ou le petit axe, les lignes de l'une des courbures se projettent encore suivant des ellipses, mais les lignes de l'autre courbure ont pour projections des hyperboles.

339. Monge a indiqué une construction très-simple pour obtenir les projections des lignes de courbure de l'ellipsoïde sur l'un des plans principaux. Considérons, par exemple, les projections sur le plan xy qui est celui du grand axe et de l'axe moyen. Désignons par x_1 et y_1 les longueurs des demi-axes de l'ellipse suivant laquelle se projette une ligne de courbure du premier système, on aura, d'après les équations (4),

$$\frac{c^2 x_1^2}{\rho^2} = \mu^2, \quad \frac{(c^2 - b^2) y_1^2}{\rho^2 - b^2} = \mu^2 - b^2;$$

d'où, par l'élimination de μ,

$$(6) \qquad \frac{c^2 x_1^2}{b^2 \rho^2} - \frac{(c^2 - b^2) y_1^2}{b^2 (\rho^2 - b^2)} = 1,$$

Si les lettres x_1 et y_1 représentaient les demi-axes de l'hyperbole suivant laquelle se projette une ligne du second système sur le plan xy, on aurait de même, par les équations (5),

$$\frac{c^2 x_1^2}{\rho^2} = \nu^2, \quad \frac{(c^2 - b^2) y_1^2}{\rho^2 - b^2} = b^2 - \nu^2,$$

d'où, par l'élimination de ν,

$$(7) \qquad \frac{c^2 x_1^2}{b^2 \rho^2} + \frac{(c^2 - b^2) y_1^2}{b^2 (\rho^2 - b^2)} = 1,$$

Regardons x_1 et y_1 comme des coordonnées ; les équa-

tions (6) et (7) appartiendront à une hyperbole et à une ellipse qui a même centre que l'ellipsoïde et dont les axes coïncident en direction avec les axes des projections des lignes de courbure. Monge a nommé ces courbes *hyperbole auxiliaire* et *ellipse auxiliaire*. Si on les suppose construites et qu'on prenne les coordonnées de chaque point de la première pour les demi-axes d'une série d'ellipses, les coordonnées de chaque point de la seconde pour les demi-axes d'une série d'hyperboles, on aura les projections des lignes de l'une et de l'autre courbure.

Si l'on fait $y_1 = 0$, les équations (6) et (7) s'accordent à donner

$$x_1 = \pm \frac{b\rho}{c};$$

or ces abscisses sont celles qui conviennent aux ombilics (n° **321**); donc les sommets communs de l'hyperbole auxiliaire et de l'ellipse auxiliaire sont précisément les projections des ombilics sur le plan xy; en outre, ces sommets sont toujours à l'intérieur de la section principale, car, b étant inférieur à c, par hypothèse, la quantité $\frac{b\rho}{c}$ est moindre que le demi-grand axe ρ de l'ellipsoïde.

Lorsque $\mu^2 = b^2$, l'ellipse, projection des lignes de la première courbure, a pour grand axe l'axe commun de l'hyperbole auxiliaire et de l'ellipse auxiliaire, et son petit axe est nul; cette ellipse se confond ainsi avec l'axe des x, et il en résulte que l'ellipse principale située dans le plan xz est une ligne de courbure de l'ellipsoïde. Quand μ^2 croît de b^2 à c^2, les deux axes de l'ellipse augmentent; pour $\mu^2 = c^2$, cette ellipse se confond avec l'ellipse principale située dans le plan xy, laquelle est ainsi une ligne de courbure de l'ellipsoïde. La variable μ^2 ne devant pas avoir de valeurs supérieures à c^2, l'hyperbole auxiliaire doit être limitée aux points où elle est rencon-

trée par les tangentes menées à l'ellipse principale, parallèlement aux axes.

Passons aux lignes de la seconde courbure. Quand ν^2 est égal à b^2, l'hyperbole projection des lignes de courbure a pour axe transverse l'axe commun de l'hyperbole auxiliaire et de l'ellipse auxiliaire; l'axe non transverse est nul et la courbe se réduit aux portions de ligne droite comprises entre les projections des ombilics et l'ellipse principale. Quand ν^2 décroît depuis sa valeur maxima b^2 jusqu'à zéro, l'axe transverse diminue et l'axe non transverse augmente; le premier axe est nul pour $\nu^2 = 0$, l'hyperbole se réduit alors à l'axe des y, et il s'ensuit que la troisième section principale de l'ellipsoïdé située dans le plan yz est encore une ligne de courbure.

Toutes les ellipses et les hyperboles dont nous nous occupons tournent leurs concavités vers les deux points où se projettent les ombilics. Les lignes de courbure sont pliées autour de ces quatre ombilics, les unes d'un côté, les autres du côté opposé; elles se resserrent toujours à mesure qu'elles s'en approchent, et quand elles les atteignent elles se confondent avec l'ellipse principale qui les contient.

340. Toutes les lignes de courbure de l'ellipsoïde ont pour projections des ellipses sur le plan du plus grand axe et du plus petit; pour construire ces projections, il suffit ici d'employer une seule *ellipse auxiliaire*. Désignons, en effet, par x_1 et z_1 les demi-axes de l'une des ellipses projections des lignes de courbure, on aura

$$\frac{b^2 x_1^2}{\rho^2} = \mu^2, \quad \frac{(c^2 - b^2) z_1^2}{\rho^2 - c^2} = c^2 - \mu^2,$$

ou

$$\frac{b^2 x_1^2}{\rho^2} = \nu^2, \quad \frac{(c^2 - b^2) z_1^2}{\rho^2 - c^2} = c^2 - \nu^2;$$

l'élimination de μ^2 ou de ν^2 donne

$$(8)\qquad \frac{b^2 x_1^2}{c^2 \rho^2} + \frac{(c^2 - b^2) z_1^2}{c^2(\rho^2 - c^2)} = 1,$$

équation d'une ellipse qui pourra être employée pour la construction des projections des lignes de l'une et de l'autre courbure. Pour les lignes de la première courbure, on aura

$$\mu^2 > b^2, \quad \text{d'où} \quad x_1 > \rho, \quad z_1 < \sqrt{\rho^2 - c^2},$$

et, pour celles de la seconde courbure,

$$\nu^2 < b^2, \quad \text{d'où} \quad x_1 < \rho, \quad z_1 > \sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

Il suffit pour notre objet de considérer le quadrant de l'ellipse auxiliaire, situé dans l'angle des x et des z positives; alors on voit que la droite $x_1 = \rho$, qui est tangente à l'ellipse principale, divisera le quadrant de l'ellipse auxiliaire en deux parties, dont l'une répondra aux lignes de la première courbure, l'autre aux lignes de la seconde courbure.

Les coordonnées des sommets de l'ellipse auxiliaire sont

$$\pm \frac{c\rho}{b}, \quad \pm \frac{c\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}};$$

les droites qui joignent ces sommets deux à deux forment un losange dont les côtés ont pour équation

$$(9)\qquad \pm \frac{bx}{c\rho} \pm \frac{\sqrt{c^2 - b^2}\, z}{c\sqrt{\rho^2 - c^2}} = 1.$$

Si l'on élimine x entre l'équation (9) et celle des projections des lignes de courbure, savoir :

$$\frac{b^2 x^2}{\rho^2 \mu^2} + \frac{(c^2 - b^2) z^2}{(\rho^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)} = 1,$$

on trouvera

$$\left[z \pm \frac{(c^2-\mu^2)\sqrt{\rho^2-c^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}\right]^2 = 0;$$

cette équation ayant ses deux racines égales, on en conclut que les projections de toutes les lignes de courbure sont tangentes à chacun des quatre côtés du losange; elles sont donc inscrites dans ce losange. Il résulte de là que les ombilics sont les quatre points où les côtés du même losange touchent l'ellipse principale située dans le plan xz; car nous avons vu que cette ellipse principale est une ligne de courbure, et elle contient d'ailleurs les ombilics.

341. Pour former l'équation différentielle des projections des lignes de courbure de l'ellipsoïde, conformément à la méthode du n° 322, il suffira de calculer les quantités p, q, r, s, t, d'après l'équation

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2-b^2} + \frac{z^2}{\rho^2-c^2} = 1$$

de la surface, et de substituer les valeurs trouvées dans l'équation (6) du numéro cité. Nous avons déjà fait une partie de ce calcul au n° 321 et nous avons trouvé

$$\frac{x}{\rho^2} + \frac{pz}{\rho^2-c^2} = 0, \quad \frac{y}{\rho^2-b^2} + \frac{qz}{\rho^2-c^2} = 0,$$

puis

$$rz + (1+p^2) = \frac{c^2}{\rho^2},$$

$$tz + (1+q^2) = \frac{c^2-b^2}{\rho^2-b^2},$$

$$sz + pq = 0.$$

On tire de là

$$z[pqr-(1+p^2)s]=\frac{c^2}{\rho^2}pq,$$

$$z[(1+q^2)s-pqt]=-\frac{c^2-b^2}{\rho^2-b^2}pq,$$

$$z[(1+q^2)r-(1+p^2)t]=\frac{b^2(\rho^2-c^2)}{\rho^2(\rho^2-b^2)}+\frac{c^2}{\rho^2}q^2-\frac{c^2-b^2}{\rho^2-b^2}p^2;$$

substituant ces expressions dans l'équation (6) du n° **322**, et remettant ensuite, au lieu de p et q, leurs valeurs en x et y, on aura l'équation demandée, savoir :

$$(10)\qquad \mathrm{A}xy\frac{dy^2}{dx^2}+(x^2-\mathrm{A}y^2-\mathrm{B})\frac{dy}{dx}-xy=0,$$

où nous avons fait, pour abréger,

$$\mathrm{A}=\frac{(c^2-b^2)\rho^2}{c^2(\rho^2-b^2)},\quad \mathrm{B}=\frac{b^2\rho^2}{c^2}.$$

On verra, dans le Calcul intégral, comment on revient de cette équation différentielle à l'équation

$$(11)\qquad \frac{c^2x^2}{\rho^2\mu^2}+\frac{(c^2-b^2)y^2}{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)}=1,$$

entre les seules coordonnées, équation qui nous a été fournie immédiatement par la propriété générale des systèmes de surfaces orthogonales ; il est facile de vérifier que l'équation (10) résulte de l'élimination de μ^2 entre l'équation (11) et celle qu'on en déduit par la différentiation relative à x et à y.

Des lignes de niveau et des lignes de plus grande pente.

342. Une surface étant rapportée à trois plans coordonnés rectangulaires dont l'un, celui des xy, est supposé horizontal, on nomme *lignes de niveau* les sections horizontales de la surface.

Pour toute ligne de niveau, on a

$$dz = 0,$$

ou, à cause de $dz = p\,dx + q\,dy$,

$$p\,dx + q\,dy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q}.$$

Cette équation exprime qu'en chaque point d'une ligne de niveau la tangente est parallèle à la trace horizontale du plan tangent à la surface, au même point. Ce plan a effectivement pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

et le coefficient d'inclinaison de sa trace horizontale est bien égal à $-\frac{p}{q}$.

Si l'on porte la valeur précédente de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation (6) du n° 322 qui détermine les lignes de courbure, il viendra

$$pq(r - t) + (q^2 - p^2)s = 0;$$

telle est l'*équation aux dérivées partielles du deuxième ordre* qui appartient aux surfaces pour lesquelles les lignes de niveau sont des lignes de courbure.

On arrive à un résultat plus simple quand on prend pour plan horizontal le plan des zx; alors on a, pour les lignes de niveau, $\frac{dy}{dx} = 0$, et, en faisant cette hypothèse dans l'équation des lignes de courbure, celle-ci devient

$$\frac{r}{1 + p^2} - \frac{s}{pq} = 0.$$

Pour les surfaces qui satisfont à cette équation, l'une des conditions des ombilics est satisfaite d'elle-même; ces points sont donc alors donnés par une seule équa-

tion, et la surface admet par conséquent une ligne ombilicale.

343. On nomme *ligne de plus grande pente* d'une surface une ligne tracée sur la surface et qui a pour tangente en chaque point celle des tangentes de la surface qui fait le plus grand angle avec le plan horizontal. Il est évident que la tangente en un point d'une ligne de plus grande pente est elle-même ligne de plus grande pente relativement au plan tangent de la surface; par conséquent, elle est perpendiculaire à la trace horizontale de ce plan tangent.

La surface étant rapportée à trois axes rectangulaires dont l'un, celui des z, est vertical, la trace horizontale du plan tangent aura pour coefficient d'inclinaison $-\frac{p}{q}$, en faisant, comme à l'ordinaire, $dz = p\,dx + q\,dy$; l'équation différentielle des lignes de plus grande pente est donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p};$$

les dérivées q et p sont données en fonction de x et y par l'équation de la surface.

Si, par un point d'une surface, on mène une ligne de niveau et une ligne de plus grande pente, il est évident que les tangentes à ces deux lignes seront perpendiculaires, puisqu'elles sont, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à la trace du plan tangent de la surface. Il résulte de là que les lignes de niveau et les lignes de plus grande pente forment sur la surface un système double de courbes orthogonales.

D'après cela, lorsque les lignes de niveau d'une surface sont des lignes de courbure, les lignes de plus grande pente constituent le deuxième système de lignes de cour-

bure. On vérifie d'ailleurs ce fait en substituant, dans l'équation (6) du n° 322, la valeur $\frac{q}{p}$ de $\frac{dy}{dx}$ qui convient aux lignes de plus grande pente; on retrouve la même équation aux dérivées partielles que nous a donnée la substitution relative aux lignes de niveau.

344. Appliquons ce qui précède au cas de l'ellipsoïde. Soit

$$x^2 + my^2 + nz^2 = a^2$$

l'équation de la surface. On a

$$x + nzp = 0, \quad my + nzq = 0,$$

d'où

$$\frac{q}{p} = \frac{my}{x}.$$

L'équation différentielle des lignes de plus grande pente est donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{y} - m\frac{dx}{x} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est la différentielle de

$$\log y - m \log x \quad \text{ou} \quad \log \frac{y}{x^m};$$

le quotient $\frac{y}{x^m}$ est donc égal à une constante c, et l'on a

$$y = cx^m$$

pour l'équation des projections horizontales des lignes de plus grande pente de l'ellipsoïde.

Des surfaces réglées; leur distinction en surfaces développables et en surfaces gauches.

345. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, d'étudier diverses classes de surfaces et de faire connaître

les équations aux dérivées partielles par lesquelles on peut représenter toutes les surfaces d'une même classe.

Parmi les surfaces dont nous allons nous occuper, il faut remarquer surtout les *surfaces réglées*, c'est-à-dire celles qui sont engendrées par une droite mobile. Cette classe des surfaces réglées se subdivise en deux genres très-distincts qui comprennent, l'un les surfaces que nous avons nommées *développables*, l'autre les surfaces *gauches*.

Désignons par x, y, z des coordonnées rectilignes et soient a, b, α, β des fonctions d'un paramètre variable; les équations de la génératrice d'une surface réglée quelconque seront

$$(1) \qquad x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta.$$

Il est évident qu'on peut prendre pour le paramètre variable l'une quelconque des quantités a, b, α, β, à moins qu'elle ne se réduise à une constante; il n'y a donc en réalité que trois fonctions arbitraires, dans le cas le plus général.

Cherchons d'abord la condition pour que la droite (1) engendre une surface développable. Comme une surface développable est l'enveloppe d'un plan mobile qui contient la génératrice, l'équation de ce plan mobile sera

$$(2) \qquad (x - az - \alpha) + \theta(y - bz - \beta) = 0,$$

θ étant une certaine fonction du paramètre dont dépendent a, b, α, β; en différentiant cette équation (2) par rapport au paramètre, il vient

$$(3) \quad -(zda + d\alpha) - \theta(zdb + d\beta) + d\theta(y - bz - \beta) = 0,$$

et, pour que notre surface soit développable, il faut et il suffit que le système des équations (2) et (3) représente la même droite que le système des équations (1). L'équa-

tion (2) est vérifiée par les équations (1), et, pour que l'équation (3) le soit aussi, il faut que l'on ait

$$(zda + d\alpha) + \theta(zdb + d\beta) = 0,$$

quel que soit z. Cela donne les deux conditions

$$da + \theta db = 0, \quad d\alpha + \theta d\beta = 0,$$

d'où, par l'élimination de θ,

$$(4) \qquad da\,d\beta - db\,d\alpha = 0.$$

Telle est l'équation qui exprime la condition d'une surface développable ; le raisonnement qui nous y a conduit est le même que celui dont nous avons fait usage pour déterminer les lignes de courbure des surfaces. Lorsque la condition (4) n'est pas satisfaite, la droite mobile représentée par les équations (1) engendre une surface gauche.

346. Désignons par θ le paramètre dont dépendent a, b, α, β, et considérons les deux génératrices qui répondent aux valeurs θ, $\theta + \Delta\theta$ du paramètre ; les équations de ces génératrices seront

$$\left\{\begin{array}{l} x = az + \alpha, \\ y = bz + \beta, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = (a + \Delta a)z + (\alpha + \Delta\alpha), \\ y = (b + \Delta b)z + (\beta + \Delta\beta). \end{array}\right.$$

Soient D la plus courte distance de ces deux droites et i l'angle qu'elles font entre elles ; on aura, par les formules connues,

$$(5) \quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{D} = \dfrac{\Delta a \Delta\beta - \Delta b \Delta\alpha}{\pm\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2}}, \\[2ex] \sin i = \dfrac{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\sqrt{(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2 + 1}}, \end{array}\right.$$

d'où

$$\frac{D}{i} = \pm \frac{\sin i}{i} \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \sqrt{(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2 + 1}$$

$$\times \frac{\dfrac{\Delta a}{\Delta\theta}\dfrac{\Delta 6}{\Delta\theta} - \dfrac{\Delta b}{\Delta\theta}\dfrac{\Delta \alpha}{\Delta\theta}}{\left(\dfrac{\Delta a}{\Delta\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta b}{\Delta\theta}\right)^2 + \left(a\dfrac{\Delta b}{\Delta\theta} - b\dfrac{\Delta a}{\Delta\theta}\right)^2}.$$

Si l'on fait tendre $\Delta\theta$ vers zéro et qu'on passe aux limites, la formule précédente deviendra, après la suppression du diviseur commun $d\theta^2$,

$$(6)\quad \lim \frac{D}{i} = \pm (a^2 + b^2 + 1) \frac{da\, d6 - db\, d\alpha}{da^2 + db^2 + (a\, db - b\, da)^2},$$

et, lorsque la condition (4) n'est pas remplie, le second membre de cette formule a une valeur finie différente de zéro. On conclut de là le théorème suivant :

Théorème I. — *Dans une surface gauche, la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines et l'angle de ces mêmes génératrices sont des infiniment petits du même ordre.*

347. Dans le cas des surfaces développables, les cylindres exceptés, le rapport $\frac{D}{i}$ tend vers la limite zéro et par conséquent la distance D est un infiniment petit d'ordre supérieur à 1, relativement à i; il importe d'évaluer cet ordre infinitésimal. Mais, comme les génératrices d'une surface développable sont tangentes à une même courbe qui est l'arête de rebroussement de la surface, il convient d'introduire les quantités relatives à cette arête. Désignons donc par x, y, z les coordonnées rectangulaires de l'arête et par α, 6, γ les angles que fait sa tangente avec les axes, les équations de cette tangente seront

$$\frac{X - x}{\cos\alpha} = \frac{Y - y}{\cos 6} = \frac{Z - z}{\cos\gamma};$$

on aura de même, pour une seconde tangente,

$$\frac{X - x - \Delta x}{\cos\alpha + \Delta\cos\alpha} = \frac{Y - y - \Delta y}{\cos6 + \Delta\cos6} = \frac{Z - z - \Delta z}{\cos\gamma + \Delta\cos\gamma},$$

et si l'on fait, pour abréger,

$$(1) \qquad \begin{cases} A = \cos6\,\Delta\cos\gamma - \cos\gamma\,\Delta\cos6, \\ B = \cos\gamma\,\Delta\cos\alpha - \cos\alpha\,\Delta\cos\gamma, \\ C = \cos\alpha\,\Delta\cos6 - \cos6\,\Delta\cos\alpha, \end{cases}$$

l'expression de la plus courte distance D des deux tangentes sera

$$(2) \qquad D = \frac{A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Soient, comme à l'ordinaire, ξ, η, ζ et λ, μ, ν les angles formés avec les axes par la normale principale et par l'axe du plan osculateur de l'arête, s l'arc de cette arête, $d\sigma$ et $d\tau$ les angles de contingence et de torsion. La formule de Taylor donne

$$\Delta x = dx + \frac{d^2 x}{2} + \frac{d^3 x}{6} + \ldots;$$

en outre, si l'on prend l'arc s pour variable indépendante, on aura (nº 274)

$$dx = ds\cos\alpha,$$
$$d^2 x = ds\,d\sigma\cos\xi,$$
$$d^3 x = ds\,d^2\sigma\cos\xi - ds\,d\sigma^2\cos\alpha - ds\,d\sigma\,d\tau\cos\lambda,$$

et la valeur de Δx sera, en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre,

$$\Delta x = \left(ds - \frac{ds\,d\sigma^2}{6}\right)\cos\alpha + \left(\frac{ds\,d\sigma}{2} + \frac{ds\,d^2\sigma}{6}\right)\cos\xi - \frac{ds\,d\sigma\,d\tau}{6}\cos\lambda;$$

on obtiendra, par cette même formule, les valeurs de Δy

et de Δz en remplaçant α, ξ, λ d'abord par 6, η, μ, puis par γ, ζ, ν. Comme on a évidemment

$$A\cos\alpha + B\cos 6 + C\cos\gamma = 0,$$

la valeur de D sera, aux infiniment petits près du quatrième ordre,

$$D = \left(\frac{ds\,d\sigma}{2} + \frac{ds\,d^2\sigma}{6}\right)\frac{A\cos\xi + B\cos\eta + C\cos\zeta}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
$$- \frac{ds\,d\sigma\,d\tau}{6}\,\frac{A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Or on a, par les formules du n° 265,

$$A\cos\xi + B\cos\eta + C\cos\zeta$$
$$= -(\cos\lambda\,\Delta\cos\alpha + \cos\mu\,\Delta\cos 6 + \cos\nu\,\Delta\cos\gamma),$$
$$A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu$$
$$= +(\cos\xi\,\Delta\cos\alpha + \cos\eta\,\Delta\cos 6 + \cos\zeta\,\Delta\cos\gamma).$$

On a ensuite, en négligeant ici les infiniment petits du troisième ordre,

$$\Delta\cos\alpha = d\cos\alpha + \frac{d^2\cos\alpha}{2}$$
$$= \left(d\sigma + \frac{d^2\sigma}{2}\right)\cos\xi - \frac{d\sigma^2}{2}\cos\alpha - \frac{d\sigma\,d\tau}{2}\cos\lambda,$$

formule d'où l'on déduit $\Delta\cos 6$ et $\Delta\cos\gamma$ par des changements de lettres; on conclut de là que

$$A\cos\xi + B\cos\eta + C\cos\zeta = \frac{1}{2}d\sigma\,d\tau,$$

aux infiniment petits près du deuxième ordre, et

$$A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu = d\sigma,$$

aux infiniment petits près du premier ordre; on a enfin, en négligeant les infiniment petits du deuxième ordre,

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = d\sigma,$$

et par conséquent l'expression de D devient

$$(3) \qquad D = \frac{ds\,d\sigma\,d\tau}{12},$$

aux infiniment petits près du quatrième ordre. On peut écrire aussi, en désignant par R et T les rayons des deux courbures,

$$D = \frac{ds^3}{12TR}.$$

On a ainsi ce théorème :

Théorème II. — *Le rapport de la plus courte distance d'une tangente donnée d'une courbe quelconque et d'une deuxième tangente infiniment voisine, au cube de l'arc compris entre les points de contact, a pour limite la douzième partie du produit des deux courbures à l'origine de l'arc.*

Il faut remarquer que l'ordre infinitésimal de D ne peut jamais s'élever au-dessus du troisième ; car le terme de cet ordre ne disparaît de la formule (3) que si $d\tau = 0$, et alors, la courbe étant plane, on a rigoureusement $D = 0$; de là ce théorème dû à M. Bouquet :

Théorème III. — *Étant donné un système de droites dont les équations contiennent un paramètre variable, la plus courte distance de deux droites infiniment voisines ne peut pas être d'un ordre infinitésimal supérieur à 3, relativement à l'angle des mêmes droites, à moins qu'elle ne se réduise rigoureusement à zéro.*

Des surfaces cylindriques. — Équation aux dérivées partielles de ces surfaces.

348. Le cas le plus simple des surfaces développables est celui des surfaces cylindriques. Le plan mobile qui

est enveloppé par la surface, et qui n'est autre que son plan tangent, est parallèle à une droite fixe donnée; cette considération permet de former immédiatement l'équation aux dérivées partielles de la surface. Car soient

$$X = aZ, \quad Y = bZ$$

les équations de la parallèle aux génératrices menée par l'origine des coordonnées rectilignes, et

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

l'équation du plan tangent au point (x, y, z) de la surface. La condition pour que ce plan soit parallèle à la droite est

$$(1) \qquad ap + bq = 1;$$

c'est l'équation aux dérivées partielles qui appartient à toutes les surfaces cylindriques.

On peut aussi déduire l'équation (1) de l'équation entre les coordonnées qui appartient aux surfaces cylindriques. Supposons que les équations

$$(2) \qquad x = az + \alpha, \quad y = bz + 6$$

représentent une génératrice de la surface; α et 6 dépendent d'un même paramètre et, par conséquent, ces quantités sont liées entre elles par une équation

$$(3) \qquad \Phi(\alpha, 6) = 0,$$

Φ étant une fonction arbitraire. L'élimination de α et 6 entre les équations (2) et (3) donne

$$(4) \qquad \Phi(x - az, \; y - bz) = 0,$$

qui est l'équation générale des cylindres entre les coordonnées. Pour avoir l'équation aux dérivées partielles, il suffit d'éliminer la fonction Φ par la méthode du n° **82**.

En différentiant l'équation (4) ou (3), d'abord par rapport à x, puis par rapport à y, il vient

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}(1 - ap) - \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}bp = 0,$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}aq + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}(1 - bq) = 0,$$

et l'élimination du rapport $\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} : \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}$ conduit à l'équation (1).

On verra, dans le Calcul intégral, comment on peut revenir de l'équation aux dérivées partielles à l'équation entre les seules coordonnées.

Les surfaces cylindriques étant développables, leurs génératrices constituent un premier système de lignes de courbure (n° 327); le deuxième système est évidemment formé par les sections droites de la surface.

Des surfaces coniques. — Équation aux dérivées partielles de ces surfaces.

349. Les surfaces coniques appartiennent aussi au genre des surfaces développables, le plan mobile qu'elles enveloppent passe par un point fixe; ce plan mobile est d'ailleurs le plan tangent de la surface; par conséquent, si l'on désigne par x_0, y_0, z_0 les coordonnées rectilignes du sommet, par x, y, z celles de la surface, et que l'on pose $dz = p\,dx + q\,dy$, on aura

$$(1) \qquad z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0).$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles des surfaces coniques.

Cette équation (1) peut aussi être obtenue au moyen

de l'équation générale des surfaces coniques entre les coordonnées. Soient

$$(2) \qquad x - x_0 = a(z - z_0), \quad y - y_0 = b(z - z_0)$$

les équations de la génératrice. Les quantités a et b étant fonctions d'un même paramètre, elles sont liées entre elles par une équation

$$(3) \qquad \Phi(a, b) = 0,$$

dont le premier membre est une fonction arbitraire; l'élimination de a et de b entre les équations (2) et (3) donne l'équation entre x, y, z qui appartient aux surfaces coniques, savoir :

$$(4) \qquad \Phi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0.$$

Différentions l'équation (4) ou (3) d'abord par rapport à x, puis par rapport à y, il viendra

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a}[(z - z_0) - p(x - x_0)] - \frac{\partial\Phi}{\partial b}p(y - y_0) = 0,$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial a}q(x - x_0) + \frac{\partial\Phi}{\partial b}[(z - z_0) - q(y - y_0)] = 0;$$

l'élimination du rapport $\frac{\partial\Phi}{\partial a} : \frac{\partial\Phi}{\partial b}$ entre ces deux équations conduit encore à l'équation (1); cette équation (1) a pour conséquence, à son tour, l'équation (4), ainsi qu'on le verra dans le Calcul intégral.

Les génératrices d'une surface conique constituent un premier système de lignes de courbure (n° 327); le deuxième système s'obtiendra évidemment en coupant la surface par des sphères ayant pour centre le sommet de la surface.

Des surfaces conoïdes. — Équation aux dérivées partielles de ces surfaces.

350. Les surfaces *conoïdes* appartiennent à la classe des surfaces réglées et au genre des surfaces gauches. Elles sont engendrées par une droite mobile qui rencontre constamment une droite fixe et qui reste parallèle à un plan fixe; la droite fixe est nommée *directrice*, le plan fixe est le *plan directeur;* le paraboloïde hyperbolique est un conoïde.

Soient, relativement à trois axes quelconques,

$$x = mz + \mu, \quad y = nz + \nu$$

les équations de la directrice donnée,

$$Ax + By + Cz = 0$$

celle du plan directeur, et

$$(1) \qquad x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

les équations de la génératrice de la surface. Cette génératrice rencontrant la directrice et étant parallèle au plan directeur, on aura

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{a - m}{\alpha - \mu} = \dfrac{b - n}{\beta - \nu}, \\ Aa + Bb + C = 0; \end{cases}$$

les équations (2) déterminent deux des quantités a, b, α, β en fonction des deux autres, et celles-ci sont liées entre elles par une équation arbitraire. Pour avoir l'équation aux dérivées partielles de la surface, il suffit d'exprimer que le plan tangent en un point (x, y, z) de la surface, plan dont l'équation est

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

renferme la génératrice, ou est parallèle à la droite $X = aZ$, $Y = bZ$; on obtient de cette manière

$$(3) \qquad ap + bq = 1.$$

Si l'on élimine les quatre quantités a, b, α, β entre les cinq équations (1), (2), (3), on obtiendra l'équation aux dérivées partielles demandée, savoir :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{p(x - mz - \mu) + q(y - nz - \nu)}{mp + nq - 1} \\ &\quad = \frac{A(x - mz - \mu) + B(y - nz - \nu)}{Am + Bn + C}. \end{aligned} \right.$$

Cette équation se simplifie lorsqu'on prend la droite directrice pour axe des z et le plan directeur pour plan des xy; alors on a

$$m = 0, \quad \mu = 0, \quad n = 0, \quad \nu = 0, \quad A = 0, \quad B = 0,$$

et l'équation (4) se réduit à

$$(5) \qquad px + qy = 0.$$

Dans ce cas, les paramètres a, b, α, β ont, dans les équations (1) de la génératrice, des valeurs finies ; cette génératrice étant parallèle au plan des xy et coupant l'axe des z, elle a des équations de la forme

$$(6) \qquad z = h, \quad y = gx;$$

les constantes h et g sont liées l'une à l'autre par une équation arbitraire, et si l'on pose

$$(7) \qquad h = \varphi(g),$$

l'élimination de h et de g entre les équations (6) et (7) donnera l'équation générale des conoïdes entre les coordonnées x, y, z; cette équation est

$$(8) \qquad z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

et elle exprime que z est une fonction homogène du degré zéro des abscisses x et y. Pour éliminer la fonction φ, il suffit donc d'appliquer le théorème des fonctions homogènes à la fonction z, ce qui reproduit l'équation (5).

Des surfaces de révolution. — Équation aux dérivées partielles de ces surfaces.

331. Dans toute surface de révolution, la normale en chaque point rencontre l'axe. Cette propriété permet de former immédiatement l'équation aux dérivées partielles des surfaces dont il s'agit; car soient, relativement à trois axes rectangulaires,

$$(X-x)+p(Z-z)=0, \quad (Y-y)+q(Z-z)=0$$

les équations de la normale au point (x, y, z), et

$$X=mZ+\mu, \quad Y=nZ+\nu$$

celles de l'axe de la surface. En éliminant X, Y, Z entre les quatre équations précédentes, il vient

$$(1) \quad (q+n)(x-mz-\mu)-(p+m)(y-nz-\nu)=0,$$

ce qui est l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution.

On peut encore tirer cette équation de celle qui a lieu entre les coordonnées. Effectivement la surface est engendrée par un cercle dont le centre est situé sur l'axe et dont le plan reste perpendiculaire au même axe. On peut prendre, pour représenter ce cercle, les deux équations

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x-\mu)^2+(y-\nu)^2+z^2=u, \\ mx+ny+z=v, \end{array} \right.$$

dont la première appartient à une sphère variable qui a pour centre la trace de l'axe sur le plan xy, et la seconde à un plan mobile perpendiculaire à l'axe. Les

quantités u et v sont liées par une équation arbitraire

$$(3) \qquad \Phi(u, v) = 0,$$

qui devient l'équation des surfaces de révolution quand on remplace u et v par les valeurs tirées des équations (2). Si l'on différentie l'équation (3) par rapport à x et par rapport à y, on aura

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial u}[(x-\mu)+pz]+\frac{\partial\Phi}{\partial v}(m+p)=0,$$

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial u}[(y-\nu)+qz]+\frac{\partial\Phi}{\partial v}(n+q)=0;$$

l'élimination de $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$ et de $\frac{\partial\Phi}{\partial v}$ entre ces équations reproduit l'équation (1) que nous avons obtenue directement.

Si l'on prend pour axe des z l'axe de la surface, on a $m=0$, $\mu=0$, $n=0$, $\nu=0$, et l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution se réduit à

$$(4) \qquad qx - py = 0;$$

en même temps, les équations (2) et (3) donnent l'équation suivante entre les coordonnées :

$$(5) \qquad \Phi(x^2+y^2, z) = 0 \quad \text{ou} \quad x^2+y^2 = 2\varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une fonction arbitraire.

352. Dans les surfaces de révolution, les *méridiens* et les *parallèles* constituent les deux systèmes de lignes de courbure ; effectivement les normales de la surface menées par les points d'un méridien sont contenues dans un même plan, et celles qui sont menées par les points d'un parallèle forment un cône de révolution. On peut, au surplus, vérifier ce fait au moyen de l'équation générale

$$\frac{dp}{dx+p\,dz} = \frac{dq}{dy+q\,dz}$$

des lignes de courbure. On a effectivement par l'équation (4)

$$\frac{p}{x}=\frac{q}{y}=\frac{p\,dx+q\,dy}{x\,dx+y\,dy}=\frac{dz}{x\,dx+y\,dy},$$

et, à cause de l'équation (5), chacun des rapports qui figurent dans cette formule est égal à $\frac{1}{\varphi'(z)}$; on a donc

$$p=\frac{x}{\varphi'(x)},\quad q=\frac{y}{\varphi'(z)},$$

d'où

$$dp=\frac{dx}{\varphi'(z)}-\frac{x\varphi''(z)dz}{\varphi'^2(z)},\quad dq=\frac{dy}{\varphi'(z)}-\frac{y\varphi''(z)\,dz}{\varphi'^2(z)}.$$

Si l'on substitue les valeurs précédentes de p, q, dp, dq dans l'équation

$$\frac{dp}{dx+p\,dz}=\frac{dq}{dy+q\,dz}$$

des lignes de courbure, on obtient

$$[1+\varphi''(z)]\,dz(x\,dy-y\,dx)=0;$$

cette équation se décompose en deux autres, savoir :

$$dz=0 \quad \text{et} \quad d\frac{y}{x}=0;$$

on a donc, pour les lignes de l'une des courbures, $z=$ const., et pour les lignes de l'autre courbure $\frac{y}{x}=$ const.; ce qui démontre la proposition énoncée

De l'équation aux dérivées partielles des surfaces développables.

353. Lorsque l'équation d'une famille de surfaces entre les coordonnées rectilignes x, y, z et un paramètre variable α, savoir :

$$f[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)]=0,$$

ne renferme qu'une seule fonction arbitraire $\varphi(\alpha)$ du paramètre, on peut éliminer la fonction arbitraire φ des deux équations

$$f=0,\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha}=0,$$

qui appartient à l'enveloppe des surfaces proposées, et l'on obtient ainsi une équation aux dérivées partielles du premier ordre, laquelle convient à toutes les enveloppes qui ne diffèrent entre elles que par la nature de la fonction φ. Nous ne reprendrons pas ici le calcul que nous avons suffisamment développé au n° 86, et, à l'égard du cas où l'équation proposée renfermerait plusieurs fonctions arbitraires du paramètre α, nous devons nous borner à indiquer ce qui concerne les surfaces développables.

354. Considérons un plan mobile représenté par l'équation

$$(1)\qquad z=\alpha x+y\varphi(\alpha)+\psi(\alpha),$$

α étant un paramètre variable, $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$ deux fonctions arbitraires de ce paramètre. La dérivée de l'équation (1) par rapport à α est

$$(2)\qquad 0=x+y\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha),$$

et le système des équations (1) et (2) représente toutes les surfaces développables.

La valeur de la différentielle totale dz s'obtiendra en différentiant l'équation (1) dans l'hypothèse de α variable; mais, comme le coefficient de $d\alpha$ est nul en vertu de l'équation (2), on aura simplement

$$(3)\qquad dz=\alpha\,dx+\varphi(\alpha)\,dy,$$

comme si α était constant. Il résulte de là que l'on a

$$(4)\qquad p=\alpha,\quad q=\varphi(\alpha),$$

et de là il est aisé de conclure deux équations aux dérivées partielles du premier ordre qui conviennent à toutes les surfaces développables et qui ne renferment chacune qu'une seule fonction arbitraire. En effet, les équations (4) donnent d'abord, par l'élimination de α,

$$q = \varphi(p), \tag{5}$$

et, en portant dans l'équation (1) les valeurs de α et de $\varphi(\alpha)$ tirées des équations (4), on obtient

$$z = px + qy + \psi(p). \tag{6}$$

Chacune des équations (5) et (6) renferme une seule fonction arbitraire; ces équations sont celles que nous voulions obtenir. Il faut remarquer que l'équation

$$z = px + qy + \Psi(p, q), \tag{7}$$

où Ψ désigne une fonction arbitraire de p et q, n'a pas plus de généralité que l'équation (6), car, q étant une fonction de p, $\Psi(p, q)$ est elle-même une simple fonction arbitraire de p. On verra dans le Calcul intégral que, réciproquement, l'équation (5) ne peut donner que des surfaces développables; il en est de même de l'équation (6) ou (7), avec une certaine restriction.

355. Maintenant, pour éliminer la fonction arbitraire qui reste dans chacune des équations (5), (6) ou (7), il faut introduire les dérivées partielles du deuxième ordre.

Considérons d'abord l'équation (5); en la différentiant totalement, il vient

$$dq = \varphi'(p)\,dp$$

ou

$$r\,dx + s\,dy = \varphi'(p)\,(s\,dx + t\,dy);$$

on tire de là

$$r = s\,\varphi'(p), \quad t\,\varphi'(p) = s,$$

et, en multipliant, il vient

(8) $$rt - s^2 = 0.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles du second ordre qui convient aux surfaces développables; elle exprime, comme on voit, que l'un des rayons de courbure principaux est infini en chaque point de la surface.

Considérons maintenant l'équation (7), qui comprend l'équation (6), et différentions-la totalement, on aura

$$dz = (p\,dx + q\,dy) + \left(x + \frac{\partial\Psi}{\partial p}\right) dp + \left(y + \frac{\partial\Psi}{\partial q}\right) dq,$$

ce qui, à cause de $dz = p\,dx + q\,dy$, se réduit à

$$\left(x + \frac{\partial\Psi}{\partial p}\right) dp + \left(y + \frac{\partial\Psi}{\partial q}\right) dq = 0.$$

Remplaçant dp et dq par leurs valeurs $r\,dx + s\,dy$, $s\,dx + t\,dy$, et égalant ensuite à zéro les coefficients de dx et de dy, il vient

$$\left(x + \frac{\partial\Psi}{\partial p}\right) r = -\left(y + \frac{\partial\Psi}{\partial q}\right) s,$$
$$\left(y + \frac{\partial\Psi}{\partial q}\right) t = -\left(x + \frac{\partial\Psi}{\partial p}\right) s;$$

en multipliant ces équations l'une par l'autre, on reproduit l'équation (8). Nous devons remarquer toutefois que les équations précédentes sont satisfaites en posant

(9) $$x + \frac{\partial\Psi}{\partial p} = 0, \quad y + \frac{\partial\Psi}{\partial q} = 0;$$

l'élimination de p et q entre les équations (7) et (9) donne une équation entre x, y, z, qui appartient en général à une surface non développable et qui satisfait cependant à l'équation (7). Mais je n'insisterai pas ici sur ce sujet, qui se rapporte surtout au Calcul intégral.

356. En portant les valeurs de p, q, dp et dq tirées des équations (4) et celle de dz tirée de l'équation (3) dans l'équation

$$\frac{dp}{dx + p\,dz} = \frac{dq}{dy + q\,dz}$$

des lignes de courbure, on obtient

$$(10) \quad \begin{cases} d\alpha \{ [1 + \varphi^2(\alpha) - \alpha\varphi(\alpha)\varphi'(\alpha)]\,dy \\ \quad + [\alpha\varphi(\alpha) - (1+\alpha^2)\varphi'(\alpha)]\,dx \} = 0 : \end{cases}$$

cette équation se décompose en deux autres, savoir :

$$(11) \qquad d\alpha = 0,$$

$$(12) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\alpha^2)\varphi'(\alpha) - \alpha\varphi(\alpha)}{1 + \varphi^2(\alpha) - \alpha\varphi(\alpha)\varphi'(\alpha)}.$$

L'équation (11) donne $\alpha =$ const.; elle convient aux caractéristiques ou aux génératrices de la surface qui forment ainsi un premier système de lignes de courbure, comme nous en avons déjà fait la remarque (n° 327). Ensuite, si l'on élimine l'une des variables x, y ou α entre l'équation (12) et l'équation (2), on aura l'équation différentielle qui convient au deuxième système de lignes de courbure.

Des surfaces des canaux.

357. La surface d'un *canal* est l'enveloppe d'une sphère de rayon donné dont le centre décrit une courbe plane arbitraire. Si l'on désigne par a le rayon de la sphère, par α un paramètre variable et par $\varphi(\alpha)$ une fonction de ce paramètre, l'équation générale des surfaces que nous considérons résultera de l'élimination de α entre les deux équations

$$(1) \quad \begin{cases} (x-\alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 + z^2 = a^2, \\ (x-\alpha) + [y - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Nous avons déjà formé au n° 87 l'équation aux dérivées partielles du premier ordre qui convient à ces surfaces; nous avons vu que la première équation (1) donne

$$(2)\qquad (x-\alpha)+pz=0,\quad [y-\varphi(\alpha)]+qz=0,$$

et que l'on a, par l'élimination de α et de $\varphi(\alpha)$,

$$(3)\qquad z=\frac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Nous nous proposons de plus, ici, de trouver les lignes de courbure de la surface. La différentiation des équations (2) donne

$$(4)\qquad \begin{cases} dx+p\,dz+z\,dp=d\alpha, \\ dy+q\,dz+z\,dq=\varphi'(\alpha)\,d\alpha; \end{cases}$$

d'ailleurs on a, par les mêmes équations (2) et la deuxième des équations (1),

$$p+q\varphi'(\alpha)=0 \quad \text{ou} \quad \varphi'(\alpha)=\frac{-p}{q};$$

on conclut de là

$$1+z\frac{dp}{dx+p\,dz}=\frac{d\alpha}{dx+p\,dz},$$

$$1+z\frac{dq}{dy+q\,dz}=-\frac{p}{q}\,\frac{d\alpha}{dy+q\,dz}.$$

Or les premiers membres de ces formules sont égaux entre eux pour les lignes de courbure; donc l'équation de ces lignes sera

$$\frac{q\,d\alpha}{dx+p\,dz}+\frac{p\,d\alpha}{dy+q\,dz}=0$$

ou

$$(1+p^2+q^2)\,dz\,d\alpha=0,$$

ce qui donne

$$d\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad dz = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \text{const.} \quad \text{ou} \quad z = \text{const.}$$

Ainsi les lignes de la première courbure ne sont autre chose que les caractéristiques de l'enveloppe, lesquelles sont des circonférences de grands cercles de la sphère mobile; ces lignes de courbure seront aussi les lignes de plus grande pente de la surface si l'on suppose le plan xy horizontal, car les lignes de la seconde courbure sont alors des lignes de niveau.

De l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées.

358. Nous considérerons enfin, en terminant ce Chapitre, le cas général des surfaces réglées. Les équations de la génératrice renferment trois fonctions arbitraires et l'élimination de ces fonctions exige que l'on introduise les dérivées partielles du troisième ordre. Nous ferons donc, comme à l'ordinaire,

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

et nous poserons, en outre,

$$dr = u\,dx + \varpi\,dy, \quad ds = \varpi\,dx + v\,dy, \quad dt = v\,dx + w\,dy.$$

Cela posé, soient

$$(1) \qquad x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

les équations de la génératrice de la surface.

Différentions les équations (1) par rapport à x et y, et dénotons par a', b', α', β' les dérivées de a, b, α, β rela-

tives au paramètre θ dont dépendent ces quantités. On aura

(2) $$\begin{cases} 1 = ap + (a'z + \alpha')\dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \\ 0 = bp + (b'z + \beta')\dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} 0 = aq + (a'z + \alpha')\dfrac{\partial\theta}{\partial y}, \\ 1 = bq + (b'z + \beta')\dfrac{\partial\theta}{\partial y}. \end{cases}$$

On tire de là

$$\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial x}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial y}} = \frac{ap-1}{aq} = \frac{bp}{bq-1} = \frac{b(ap-1)-abp}{baq-a(bq-1)} = -\frac{b}{a};$$

il en résulte

(4) $$ap + bq = 1$$

et

(5) $$a\frac{\partial\theta}{\partial x} + b\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0;$$

les dérivées a', b', α', β' que nous avons introduites ne figurent pas, comme on voit, dans les précédentes équations.

Différentiant l'équation (4) par rapport à x, puis par rapport à y, il vient

$$(ar + bs) + (a'p + b'q)\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0,$$

$$(as + bt) + (a'p + b'q)\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0;$$

ajoutant ces deux équations après les avoir multipliées

respectivement par a et b, il viendra, à cause de la formule (5),

$$(6) \qquad a^2 r + 2abs + b^2 t = 0.$$

En différentiant encore cette équation (6) par rapport à x et par rapport à y, on a

$$(a^2 u + 2ab w + b^2 v) + \frac{\partial (a^2 r + 2abs + b^2 t)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0,$$

$$(a^2 w + 2ab v + b^2 w) + \frac{\partial (a^2 r + 2abs + b^2 t)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0;$$

enfin, en ajoutant ces équations multipliées par a et b, on obtient, à cause de la formule (5),

$$(7) \qquad a^3 u + 3a^2 b w + 3ab^2 v + b^3 w = 0.$$

Les équations (6) et (7) ne contiennent que les deux fonctions a et b; elles sont d'ailleurs homogènes et suffisent pour l'élimination. Si l'on fait, pour abréger

$$(8) \qquad \omega = \frac{-s + \sqrt{s^2 - rt}}{t},$$

on tirera de l'équation (6) $b = a\omega$; et, en substituant cette valeur dans l'équation (7), on aura

$$(9) \qquad u + 3w\omega + 3v\omega^2 + w\omega^3 = 0,$$

équation aux dérivées partielles du troisième ordre qui appartient aux surfaces réglées.

CHAPITRE XI.

DES FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES.

Manière de représenter les variables imaginaires. — Des fonctions algébriques.

359. Nous n'avons considéré jusqu'ici que des quantités réelles; nous nous proposons maintenant d'étendre l'analyse que nous avons développée dans les premiers Chapitres de cet Ouvrage, au cas où les constantes et les variables ont des valeurs imaginaires quelconques.

Le cas où l'on a une fonction de la forme $u + v\sqrt{-1}$, u et v étant des fonctions réelles données de variables réelles, n'exige aucun principe nouveau. Il est naturel de définir la différentielle de la fonction dont il s'agit en disant qu'elle est la somme obtenue par l'addition des différentielles du, dv respectivement multipliées par les facteurs 1 et $\sqrt{-1}$. La différentielle $du + dv\sqrt{-1}$ s'obtenant alors en opérant comme si $\sqrt{-1}$ était une constante réelle, les règles qui ont été établies pour la différentiation des fonctions réelles s'étendent d'elles-mêmes aux fonctions de la forme $u + v\sqrt{-1}$, pourvu que les variables indépendantes demeurent réelles.

Mais, quant aux fonctions de variables imaginaires, elles ne peuvent être introduites dans l'Analyse qu'à la condition d'avoir été définies avec précision, et nous procéderons ici comme nous l'avons fait à l'égard des variables réelles.

Toute fonction explicite peut être obtenue en exécutant sur des variables et des constantes données un certain nombre d'opérations *élémentaires;* quand une seule de ces opérations suffit, le résultat est une *fonction simple d'une seule variable;* dans le cas contraire, le résultat des opérations exécutées est une fonction composée de fonctions d'une ou de plusieurs variables indépendantes. A l'égard des fonctions implicites, elles sont définies au moyen des équations qui expriment la manière dont elles sont liées aux variables indépendantes; les premiers membres de ces équations sont donc des fonctions explicites des diverses variables, et on les obtiendra en exécutant sur ces variables diverses opérations successives répondant chacune à ce que nous nommons une fonction *élémentaire* ou *simple.*

Il suffit donc de définir les *fonctions élémentaires d'une seule variable* que l'on veut introduire dans l'Analyse pour avoir une notion précise de l'ensemble de toutes les fonctions explicites que l'on aura à considérer; je dis *fonctions explicites,* car les équations dont dépendent les fonctions implicites ne définissent pas, en général, ces fonctions d'une manière complète. Or les fonctions élémentaires sont pour nous, jusqu'à présent, en très-petit nombre; elles se composent : 1° des fonctions qui résultent de l'une des opérations de l'Algèbre; 2° des fonctions exponentielle et logarithmique; 3° des fonctions circulaires; nous donnerons la définition de ces diverses fonctions pour le cas où la variable indépendante est imaginaire.

360. Désignons par z la variable indépendante et posons

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

x et y étant des variables réelles. Si l'on trace deux axes

de coordonnées rectangulaires, x et y représenteront les coordonnées d'un point M du plan, et l'on peut dire, avec Cauchy, qu'à chaque valeur de la variable z répond un point déterminé, et inversement. Soient ρ et ω les coordonnées polaires du point M, on aura

$$x = \rho \cos\omega, \quad y = \rho \sin\omega,$$

et par conséquent

$$z = \rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega);$$

les quantités ρ et ω seront dites le *module* et l'*argument* de la variable z.

Pour que la variable z prenne toutes les valeurs possibles, on représente successivement tous les points du plan : il suffit de donner à ρ toutes les valeurs de zéro à $+\infty$, et à ω les valeurs comprises entre zéro et 2π ou, ce qui vaut mieux, les valeurs comprises entre $-\pi$ et $+\pi$. Alors à une valeur donnée de z, c'est-à-dire à des valeurs données de x et de y, répondront des valeurs déterminées de ρ et de ω; il y aura cependant exception, dans le cas de $y = 0$, x étant négatif; alors on a $\cos\omega = -1$, $\sin\omega = 0$, et l'on peut prendre à volonté $\omega = -\pi$ ou $\omega = +\pi$. Mais on fera disparaître cet inconvénient si l'on convient que l'angle ω compris entre $-\pi$ et $+\pi$ peut approcher autant que l'on voudra de la limite inférieure $-\pi$, sans cependant jamais l'atteindre.

361. Une fonction entière de z est un polynôme $f(z)$, toujours réductible à la forme

$$\varphi(x, y) + \sqrt{-1}\,\psi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ étant des polynômes à coefficients réels. Toute fonction rationnelle de z est égale au quotient de deux fonctions entières, et l'on peut encore lui

donner la forme

$$\varphi(x, y) + \sqrt{-1}\,\psi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ étant ici des fonctions rationnelles fractionnaires et à coefficients réels. Si l'on substitue les coordonnées polaires aux coordonnées rectangulaires, une fraction rationnelle quelconque sera toujours de la forme

$$P + Q\sqrt{-1},$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de ρ, de $\sin\omega$ et de $\cos\omega$.

362. Le seul cas des fonctions algébriques élémentaires que nous ayons à examiner est celui de la fonction z^m, m étant un exposant fractionnaire $\frac{p}{q}$ dont le dénominateur q est positif.

Si l'on fait, en désignant par k un entier quelconque,

$$\begin{aligned} z &= \rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega) \\ &= \rho\left[\cos(\omega + 2k\pi) + \sqrt{-1}\sin(\omega + 2k\pi)\right], \end{aligned}$$

on aura, par la formule de Moivre,

$$z^m = \rho^m\left[\cos m(\omega + 2k\pi) + \sqrt{-1}\sin m(\omega + 2k\pi)\right],$$

ou

$$z^m = \rho^m(\cos m\omega + \sqrt{-1}\sin m\omega)(\cos 2mk\pi + \sqrt{-1}\sin 2mk\pi),$$

ρ^m étant une quantité réelle et positive. Cette expression de z^m est susceptible de q valeurs différentes, pour chaque système de valeurs attribuées à ρ et à ω; on obtient ces q valeurs en donnant, à l'entier k, q valeurs successives, $0, 1, 2, \ldots (q-1)$, par exemple. La formule précédente comprend donc q fonctions distinctes dont la plus simple

répond au cas de $k = 0$; si l'on adopte cette valeur, on aura

$$z^m = \rho^m (\cos m\omega + \sqrt{-1}\sin m\omega),$$

et la fonction z^m sera ainsi complétement définie.

Des séries dont les termes sont imaginaires.

363. Si les deux séries

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1},\ \ldots,$$
$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{n-1},\ \ldots,$$

dont les termes sont réels, sont convergentes, et que leurs sommes soient respectivement U et V, on dit que la série

$$u_0 + v_0\sqrt{-1},\quad u_1 + v_1\sqrt{-1},\quad u_2 + v_2\sqrt{-1},\quad \ldots$$

est *convergente* et qu'elle a pour somme la quantité $U + V\sqrt{-1}$.

La même série est dite au contraire *divergente*, lorsque les parties réelles de ses termes et les parties multipliées par $\sqrt{-1}$ ne forment pas deux séries convergentes.

Théorème I. — *Une série est convergente, lorsque les modules de ses termes forment une série convergente.*

En effet, soit la série

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1},\ \ldots;$$

désignons par ρ_n et ω_n le module et l'argument du terme général u_n, en sorte que l'on ait

$$u_n = \rho_n (\cos\omega_n + \sqrt{-1}\sin\omega_n).$$

La série

$$\rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_{n-1},\ \ldots$$

étant convergente par hypothèse, les deux séries

$$\rho_0 \cos\omega_0,\ \rho_1 \cos\omega_1,\ \rho_2 \cos\omega_2,\ \ldots,$$
$$\rho_0 \sin\omega_0,\ \rho_1 \sin\omega_1,\ \rho_2 \sin\omega_2,\ \ldots$$

sont elles-mêmes convergentes (n° 97, théorème III, et n° 96, corollaire I), et, par conséquent, la série proposée l'est aussi par définition.

364. MULTIPLICATION DES SÉRIES. — THÉORÈME II. — *Soient*

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1},\ \ldots,\\ v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{n-1},\ \ldots \end{array}\right.$$

deux séries convergentes ayant respectivement pour sommes S *et* S', *et qui restent convergentes quand on y remplace les termes par leurs modules, la série*

$$(2)\qquad w_0,\ w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_{n-1},\ \ldots,$$

dont le terme général w_{n-1} *a pour valeur*

$$w_{n-1} = u_0 v_{n-1} + u_1 v_{n-2} + u_2 v_{n-3} + \ldots + u_{n-2} v_1 + u_{n-1} v_0,$$

est convergente, et elle a pour somme le produit SS'.

Ce théorème a été établi au n° 104 pour le cas où les termes des séries (1) sont réels; nous supposons ici ces termes quelconques. Désignons par

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_{n-1},\ \ldots,\\ \sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_{n-1},\ \ldots \end{array}\right.$$

les séries convergentes formées avec les modules des termes des séries (1) et posons

$$\tau_{n-1} = \rho_0 \sigma_{n-1} + \rho_1 \sigma_{n-2} + \rho_2 \sigma_{n-3} + \ldots + \rho_{n-2} \sigma_1 + \rho_{n-1} \sigma_0;$$

la série

$$(4)\qquad \tau_0,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_{n-1},\ \ldots$$

est aussi convergente (n° 104) et elle a pour somme le produit des sommes des séries (3).

Cela posé, soient S_n, S'_n les sommes obtenues en ajoutant les n premiers termes dans les deux séries (1) respectivement, S''_n la somme des n premiers termes de la série (2); soient aussi Σ_n, Σ'_n, Σ''_n les sommes obtenues en ajoutant les n premiers termes dans chacune des deux séries (3) et dans la série (4); on aura

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} S_n S'_n - S''_n = {} & u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n-1}) + \ldots \\ & + (u_{n-1} v_1 + u_{n-2} v_2 + \ldots + u_1 v_{n-1}), \end{aligned} \right.$$

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma_n \Sigma'_n - \Sigma''_n = {} & \rho_{n-1} \sigma_{n-1} + (\rho_{n-1} \sigma_{n-2} + \rho_{n-2} \sigma_{n-1}) + \ldots \\ & + (\rho_{n-1} \sigma_1 + \rho_{n-2} \sigma_2 + \ldots + \rho_1 \sigma_{n-1}), \end{aligned} \right.$$

et, comme le module d'une somme ne peut surpasser la somme des modules des parties, on conclut de ces formules que le module de la différence $S_n S'_n - S''_n$ est inférieur, ou au plus égal à $\Sigma_n \Sigma'_n - \Sigma''_n$. Mais cette dernière différence tend vers zéro, comme nous venons de le dire, quand n augmente indéfiniment; donc le module de la différence $S_n S'_n - S''_n$ tend aussi vers zéro, et l'on a

$$\lim(S_n S'_n - S''_n) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim S''_n = SS',$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Remarque. — Il faut remarquer que le précédent théorème ne subsiste pas nécessairement dans le cas de deux séries qui cessent d'être convergentes quand on y remplace les termes par leurs modules.

365. Nous présenterons encore ici un théorème important dont on verra bientôt l'application.

Théorème III. — *Soient m un nombre entier positif, z une quantité imaginaire donnée, et Z une variable*

qui se réduise à z quand l'entier m devient infini. L'expression

$$\left(1+\frac{Z}{m}\right)^m$$

tendra vers une limite égale à la somme de la série convergente

$$(1) \qquad 1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots,$$

si l'on fait tendre l'entier m vers l'infini.

D'abord la série dont il s'agit est convergente (n° 363); car, si ρ désigne le module de z, la série

$$1+\frac{\rho}{1}+\frac{\rho^2}{1.2}+\frac{\rho^3}{1.2.3}+\ldots$$

converge vers une limite finie qui est égale, comme on sait, à e^ρ.

Cela posé, désignons par S la somme de la série (1), par S_n la somme de ses n premiers termes, et posons

$$(2) \qquad S = S_n + R_n,$$

on aura

$$R_n = \frac{z^n}{1.2.3\ldots n}\left[1+\frac{z}{n+1}+\frac{z^2}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right].$$

Le module de la somme entre crochets est inférieur au module de la somme

$$1+\frac{\rho}{n}+\frac{\rho^2}{n^2}+\ldots,$$

obtenue en remplaçant z par son module ρ et les diviseurs $n+1$, $n+2$, ... par n; cette dernière somme est égale à $\frac{1}{1-\frac{\rho}{n}}$; si donc on désigne par θ une certaine quantité

imaginaire dont le module est inférieur à 1, on pourra écrire

$$(3)\qquad R_n = \frac{z^n}{1.2\ldots n}\,\frac{\theta}{1-\frac{\rho}{n}}.$$

Maintenant, l'entier m étant supposé plus grand que n, développons la puissance $\left(1+\frac{Z}{m}\right)^m$ par la formule du binôme relative à l'exposant entier et positif; désignons par S'_n la somme des n premiers termes et par R'_n la somme des termes suivants. On aura

$$(4)\qquad \left(1+\frac{Z}{m}\right)^m = S'_n + R'_n$$

et

$$S'_n = 1 + \frac{Z}{1} + \left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{Z^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ \left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{m}\right)\frac{Z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)},$$

$$R'_n = \left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{Z^n}{1.2\ldots n}\left[1+\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)Z}{n+1}+\ldots\right].$$

Désignons par P le module de Z; le facteur entre crochets, dans l'expression de R'_n, est une somme dont les termes sont en nombre limité, et le module de cette somme est évidemment moindre que le module de la somme illimitée

$$1 + \frac{P}{n} + \frac{P^2}{n^2} + \ldots.$$

dont la valeur est $\frac{1}{1-\frac{P}{n}}$; on aura donc, en désignant par Θ une quantité imaginaire dont le module est infé-

rieur à 1,

$$(5)\quad R'_n = \left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{Z^n}{1.2\ldots n}\frac{\Theta}{1-\frac{P}{n}}.$$

Enfin, si l'on pose

$$(6)\quad \varepsilon_k = \left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\frac{Z^k}{1.2\ldots k}-\frac{z^k}{1.2\ldots k},$$

on aura

$$(7)\qquad S'_n - S_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}.$$

Cela posé, en retranchant la formule (2) de la formule (4), on a

$$(8)\quad \left(1+\frac{Z}{m}\right)^m - S = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}) + R'_n - R_n;$$

et si l'on fait tendre l'entier m vers l'infini, n restant constant, les quantités ε s'annuleront à la limite d'après la formule (6), puisque Z tend, par hypothèse, vers la limite z; d'ailleurs l'expression (5) de R'_n devient

$$\frac{z^n}{1.2\ldots n}\frac{\theta'}{1-\frac{\rho}{n}},$$

θ' étant une quantité comprise entre zéro et 1. Donc le second membre de la formule (8) tend vers une limite qu'on peut représenter par

$$\frac{z^n}{1.2\ldots n}\frac{\theta'-\theta}{1-\frac{\rho}{n}};$$

mais je dis que cette limite est nulle et que l'on a $\theta'=\theta$. En effet, le nombre n est arbitraire, et, en le prenant suffisamment grand, le module de l'expression précédente deviendra inférieur à une quantité quelconque donnée.

De là résulte que

$$\lim\left(1+\frac{Z}{m}\right)^m = S,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Définition de la fonction exponentielle, dans le cas d'une variable imaginaire.

366. La série

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots$$

étant convergente, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire attribuée à z, elle tend vers une limite qui est une fonction de la variable z; désignons cette fonction par $\varphi(z)$, on aura

$$(1)\quad \varphi(z_1)=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\ldots+\frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+\ldots,$$

et, en changeant z en z_1,

$$\varphi(z)=1+\frac{z_1}{1}+\frac{z_1^2}{1.2}+\ldots+\frac{z_1^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+\ldots.$$

Ces deux séries restant convergentes quand on y remplace chaque terme par son module, la nouvelle série dont le premier terme est 1 et dont le terme de rang n est

$$\frac{z_1^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\times 1+\frac{z_1^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}\frac{z}{1}+\ldots$$
$$+\frac{z_1}{1}\frac{z^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}+\frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}$$

sera elle-même convergente et elle aura pour somme le produit $\varphi(z)\varphi(z_1)$ (n° 364). Or l'expression précédente est évidemment égale à

$$\frac{(z+z_1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)};$$

donc la série nouvelle dont nous parlons a pour somme $\varphi(z+z_1)$ et l'on a, en conséquence,

(2) $$\varphi(z+z_1)=\varphi(z)\,\varphi(z_1).$$

On peut encore démontrer cette relation fondamentale sans recourir au théorème sur la multiplication des séries et en faisant usage du théorème démontré au n° 365. On a effectivement, en désignant par m un entier positif,

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m\times\left(1+\frac{z_1}{m}\right)^m=\left(1+\frac{z+z_1+\frac{zz_1}{m}}{m}\right)^m;$$

et, en faisant tendre m vers l'infini, on a à la limite

$$\lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m\times\lim\left(1+\frac{z_1}{m}\right)^m=\lim\left(1+\frac{z+z_1+\frac{zz_1}{m}}{m}\right)^m,$$

ou (n° 365)

$$\varphi(z)\,\varphi(z_1)=\varphi(z+z_1),$$

comme nous l'avons déjà trouvé.

D'après cela, si z, z_1, z_2, ..., $z_{\mu-1}$ désignent des expressions imaginaires quelconques, on aura

$$\varphi(z)\,\varphi(z_1)\,\varphi(z_2)\ldots\varphi(z_{\mu-1})=\varphi(z+z_1+z_2+\ldots+z_{\mu-1}),$$

et, en supposant

$$z=z_1=z_2=\ldots=z_{\mu-1},$$

on aura

(3) $$[\varphi(z)]^\mu=\varphi(\mu z),$$

μ étant un entier positif quelconque.

Si z se réduit à une fraction positive ou négative $\pm\frac{\nu}{\mu}$, on aura

$$\left[\varphi\left(\pm\frac{\nu}{\mu}\right)\right]^\mu=\varphi(\pm\nu)=[\varphi(\pm 1)]^\nu;$$

mais la formule (2) donne pour $z = 1$, $z_1 = -1$,

$$\varphi(-1)\varphi(+1) = \varphi(0) = 1, \quad \text{d'où} \quad \varphi(-1) = [\varphi(1)]^{-1},$$

ct, par conséquent,

$$(4) \qquad \varphi\left(\pm\frac{\nu}{\mu}\right)^{\mu} = [\varphi(1)]^{\pm\nu}.$$

On a

$$\varphi(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots = e;$$

donc, en extrayant la racine $\mu^{\text{ième}}$ arithmétique des deux membres de l'équation (4), on aura

$$\varphi\left(\pm\frac{\nu}{\mu}\right) = e^{\pm\frac{\nu}{\mu}},$$

ou, en écrivant z au lieu de $\pm\frac{\nu}{\mu}$,

$$\varphi(z) = e^z.$$

Ainsi notre analyse nous permet de démontrer directement que, dans le cas où z est une quantité réelle, la fonction $\varphi(z)$ n'est autre chose que la fonction exponentielle e^z. Or l'équation (2) qui exprime la propriété caractéristique de cette fonction subsiste, quelle que soit la variable z; il est donc naturel d'étendre à tous les cas la notation déjà admise dans l'hypothèse où z est réelle. Nous poserons, d'après cela,

$$(5) \qquad e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots;$$

cette formule exprime la définition de la fonction e^z dont la propriété caractéristique consiste, d'après la formule (2), en ce que

$$e^z \times e^{z_1} = e^{z+z_1}.$$

Définition des fonctions circulaires directes dans le cas d'une variable imaginaire.

367. Lorsque la variable z est réelle, les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de z, et l'on a

$$(1)\quad \begin{cases} \cos z = 1 - \dfrac{z^2}{1.2} + \dfrac{z^4}{1.2.3.4} - \dfrac{z^6}{1.2\ldots6} + \ldots, \\ \sin z = \dfrac{z}{1} - \dfrac{z^3}{1.2.3} + \dfrac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots; \end{cases}$$

les séries contenues dans les seconds membres de ces formules demeurent convergentes quand z y désigne une variable imaginaire quelconque; on peut même ajouter que la convergence subsiste quand on remplace chaque terme par son module; effectivement, si ρ désigne le module de z, les modules des termes des précédentes séries formeront les séries nouvelles

$$1 + \frac{\rho^2}{1.2} + \frac{\rho^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

$$\frac{\rho}{1} + \frac{\rho^3}{1.2.3} + \frac{\rho^5}{1.2.3.4.5} + \ldots,$$

qui convergent respectivement vers les limites $\dfrac{e^\rho + e^{-\rho}}{2}$, $\dfrac{e^\rho - e^{-\rho}}{2}$.

Cela posé, lorsque z est une variable imaginaire, nous définissons les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ comme étant respectivement les limites des séries convergentes

$$1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

Quant aux autres fonctions circulaires directes, nous les définissons par les formules

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \operatorname{tang} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}, & \cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}, \\ \operatorname{séc} z = \dfrac{1}{\cos z}, & \operatorname{coséc} z = \dfrac{1}{\sin z}, \end{array}\right.$$

qui sont, pour le cas de z réelle, l'objet d'une démonstration dans la Trigonométrie.

Relations entre les fonctions exponentielles et les fonctions circulaires directes.

368. Si, dans la formule

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots,$$

on écrit successivement $z\sqrt{-1}$ et $-z\sqrt{-1}$ au lieu de z, on aura

$$e^{z\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{z^2}{1.2} + \ldots\right) + \sqrt{-1}\left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots\right),$$

$$e^{-z\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{z^2}{1.2} + \ldots\right) - \sqrt{-1}\left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots\right),$$

c'est-à-dire (n° 367)

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1}\sin z, \\ e^{-z\sqrt{-1}} = \cos z - \sqrt{-1}\sin z, \end{array}\right.$$

formules où z désigne une quantité réelle ou imaginaire quelconque. On déduit de là

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \cos z = \dfrac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}, \\ \sin z = \dfrac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \end{array}\right.$$

et

$$(3)\qquad \operatorname{tang} z = -\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}\sqrt{-1}.$$

Les fonctions circulaires s'expriment donc par des exponentielles, et inversement les exponentielles peuvent être remplacées par des fonctions circulaires. Si k désigne un entier quelconque, on aura, par les formules (1),

$$(4)\qquad e^{2k\pi\sqrt{-1}} = 1,\quad e^{(2k+1)\pi\sqrt{-1}} = -1.$$

369. Si, dans la formule fondamentale

$$e^z \times e^{z_1} = e^{z+z_1},$$

on remplace z et z_1 par $z\sqrt{-1}$ et $z_1\sqrt{-1}$, puis par $-z\sqrt{-1}$ et $-z_1\sqrt{-1}$, on aura, par les formules (1),

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\cos(z+z_1) + \sqrt{-1}\sin(z+z_1)\\ &\quad = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)(\cos z_1 + \sqrt{-1}\sin z_1),\\ &\cos(z+z_1) - \sqrt{-1}\sin(z+z_1)\\ &\quad = (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)(\cos z_1 - \sqrt{-1}\sin z_1); \end{aligned}\right.$$

en ajoutant ensemble ces deux équations et en retranchant ensuite la seconde de la première, on trouve

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos(z+z_1) &= \cos z\cos z_1 - \sin z\sin z_1,\\ \sin(z+z_1) &= \sin z\cos z_1 + \cos z\sin z_1. \end{aligned}\right.$$

Ce sont les formules fondamentales de la Trigonométrie générale; elles s'appliquent, comme on le voit, à deux quantités quelconques z, z_1, réelles ou imaginaires, et la même chose a lieu, en conséquence, à l'égard de toutes les autres formules que l'on a déduites des équations (6), dans la Trigonométrie, pour le cas des variables réelles.

On a, par la formule (3) du n° 366, en désignant

par μ et ν des entiers positifs,

$$(e^{\pm z})^\nu = \left(e^{\pm\frac{\nu}{\mu}z}\right)^\mu = \left(e^{\pm\frac{\nu}{\mu}z}\right)^\mu\left(e^{\pm\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{\mu}}\right)^\mu$$
$$= \left[e^{\pm\left(\frac{\nu}{\mu}z + \frac{2k\pi\sqrt{-1}}{\mu}\right)}\right]^\mu;$$

changeant z en $z\sqrt{-1}$ et extrayant la racine $\nu^{\text{ième}}$ des deux membres, il vient

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}&(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^{\frac{\nu}{\mu}}\\ &\quad = \cos\left(\frac{\nu}{\mu}z + \frac{2k\pi}{\mu}\right) \pm \sqrt{-1}\sin\left(\frac{\nu}{\mu}z + \frac{2k\pi}{\mu}\right),\end{aligned}\right.$$

ce qui est la formule de Moivre, dans le cas d'un exposant fractionnaire quelconque $\frac{\nu}{\mu}$, étendue à une variable quelconque z. Si l'on suppose la fraction $\frac{\nu}{\mu}$ irréductible, le second membre de la formule (7) aura ν valeurs distinctes qui répondent aux valeurs $0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$ de l'entier indéterminé k.

370. Les formules précédentes permettent de réduire à la forme $p + q\sqrt{-1}$ chacune des fonctions e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\tang z$, ... de la variable imaginaire

$$z = x + y\sqrt{-1}.$$

On a effectivement

$$(8)\quad e^z = e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x \times e^{y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y),$$

et, par les formules (6),

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos(x + y\sqrt{-1})\\ &= \cos x\cos(y\sqrt{-1}) - \sin x\sin(y\sqrt{-1}),\\ \sin z &= \sin(x + y\sqrt{-1})\\ &= \sin x\cos(y\sqrt{-1}) + \cos x\sin(y\sqrt{-1}),\end{aligned}$$

ou, par les formules (2),

$$(9)\quad \begin{cases} \cos(x+y\sqrt{-1}) \\ \quad = \cos x \dfrac{e^y+e^{-y}}{2} - \sin x \dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\sqrt{-1}, \\ \sin(x+y\sqrt{-1}) \\ \quad = \sin x \dfrac{e^y+e^{-y}}{2} + \cos x \dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\sqrt{-1}. \end{cases}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}(x+y\sqrt{-1}) &= \frac{\sin(x+y\sqrt{-1})}{\cos(x+y\sqrt{-1})} \\ &= \frac{2\sin(x+y\sqrt{-1})\cos(x-y\sqrt{-1})}{2\cos(x+y\sqrt{-1})\cos(x-y\sqrt{-1})}, \end{aligned}$$

ou

$$\operatorname{tang}(x+y\sqrt{-1}) = \frac{\sin 2x + \sin(2y\sqrt{-1})}{\cos 2x + \cos(2y\sqrt{-1})},$$

ou, d'après les formules (2),

$$(10)\quad \operatorname{tang}(x+y\sqrt{-1}) = \frac{\sin 2x + \dfrac{e^{2y}-e^{-2y}}{2}\sqrt{-1}}{\cos 2x + \dfrac{e^{2y}+e^{-2y}}{2}}.$$

Dans le cas de $x=0$, les formules (9) deviennent

$$(11)\quad \begin{cases} \cos(y\sqrt{-1}) = \dfrac{e^y+e^{-y}}{2}, \\ \sin(y\sqrt{-1}) = \dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\sqrt{-1}; \end{cases}$$

on en tire, par la division,

$$(12)\quad \operatorname{tang}(y\sqrt{-1}) = \frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}\sqrt{-1}.$$

De la fonction logarithmique et des fonctions circulaires inverses, dans le cas d'une variable imaginaire.

371. Nous nommerons *logarithme népérien* d'une quantité donnée $z = x + y\sqrt{-1}$ toute quantité $u + v\sqrt{-1}$ telle, que l'on ait

$$(1) \qquad e^{u+v\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}.$$

Posons

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega,$$

ρ étant positif et ω étant compris entre les limites $-\pi$ et $+\pi$; l'expression donnée $x + y\sqrt{-1}$ pourra être mise sous la forme

$$\rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega) = \rho e^{\omega\sqrt{-1}},$$

et l'équation (1) deviendra

$$e^{u}(\cos v + \sqrt{-1}\sin v) = \rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega);$$

or, pour que cette équation ait lieu, il faut et il suffit que les expressions contenues dans les deux membres aient le même module et que leurs arguments ne diffèrent que par un multiple de la circonférence. On a donc

$$e^{u} = \rho, \quad \text{d'où} \quad u = \log\rho$$

et

$$v = \omega + 2k\pi,$$

k étant un entier indéterminé.

Il résulte de là qu'une quantité imaginaire $z = \rho e^{\omega\sqrt{-1}}$ a une infinité de logarithmes népériens qui sont donnés par la formule

$$(2) \qquad \log z = \log\rho + (\omega + 2k\pi)\sqrt{-1}.$$

Si l'on suppose $k = 0$, on aura, en adoptant une locu-

tion de Cauchy, la valeur *principale* de l'expression $\log z$, et la formule

$$(3) \qquad \log z = \log \rho + \omega \sqrt{-1},$$

où ω est compris entre $-\pi$ et $+\pi$, définit alors une fonction bien déterminée de la variable z; il est bien entendu que dans les formules (2) et (3) nous représentons par $\log \rho$ le logarithme népérien *arithmétique* du nombre positif ρ.

Si le module ρ se réduit à l'unité, $\log \rho$ est nul et la formule (3) donne

$$(4) \qquad \log z = \omega \sqrt{-1};$$

si l'on a $z = -1$, l'argument ω se réduit à π et la formule (4) donne pour la valeur principale du logarithme de -1

$$\log(-1) = \pi \sqrt{-1}.$$

372. Les expressions

$$\operatorname{arc} \sin z, \quad \operatorname{arc} \cos z, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tang} z, \quad \ldots$$

admettent une infinité de valeurs pour chaque valeur réelle de z, et il en est de même quand z reçoit des valeurs imaginaires. Nous nous bornerons ici à indiquer comment on obtient les diverses valeurs qui répondent à une valeur donnée de z, et nous prendrons comme exemple l'expression $\operatorname{arc} \cos z$.

Il s'agit de trouver deux quantités réelles u et v telles, que l'on ait

$$\cos(u + v\sqrt{-1}) = z = x + y\sqrt{-1},$$

x et y étant des quantités réelles données. Cette équation revient à

$$\cos u \frac{e^v + e^{-v}}{2} - \sin u \frac{e^v - e^{-v}}{2} \sqrt{-1} = x + y\sqrt{-1},$$

et par conséquent les inconnues u, v doivent satisfaire aux deux équations

$$(1) \qquad \cos u \, \frac{e^v + e^{-v}}{2} = x, \quad \sin u \, \frac{e^v - e^{-v}}{2} = -y.$$

On tire de là

$$(2) \qquad e^v = \frac{x}{\cos u} - \frac{y}{\sin u}, \quad e^{-v} = \frac{x}{\cos u} + \frac{y}{\sin u},$$

et en multipliant

$$\frac{x^2}{\cos^2 u} - \frac{y^2}{\sin^2 u} = 1,$$

ou

$$\sin^4 u - (1 - x^2 - y^2) \sin^2 u - y^2 = 0.$$

Résolvant cette équation, il vient

$$\sin^2 u = \frac{1 - x^2 - y^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 - x^2 - y^2}{2}\right)^2 + y^2},$$

le radical étant pris avec le signe +, afin que $\sin^2 u$ soit positif; on a aussi

$$\cos^4 u - (1 + x^2 + y^2) \cos^2 u - x^2 = 0,$$

d'où

$$\cos^2 u = \frac{1 + x^2 + y^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{1 + x^2 + y^2}{2}\right)^2 - x^2},$$

$$= \frac{x^2}{\frac{1 + x^2 + y^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + x^2 + y^2}{2}\right)^2 - x^2}};$$

extrayant la racine carrée des deux membres de cette formule et remarquant que $\cos u$ a le signe de x, d'après les formules (1), on a

$$(3) \quad \cos u = \frac{x}{\left[\frac{1 + x^2 + y^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + x^2 + y^2}{2}\right)^2 - x^2}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Posons

$$(4)\quad \begin{cases} u_0 = \arccos \dfrac{x}{\left[\dfrac{1+x^2+y^2}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{1+x^2+y^2}{2}\right)^2 - x^2}\right]^{\frac{1}{2}}}, \\ v_0 = \log\left(\dfrac{x}{\cos u_0} - \dfrac{y}{\sin u_0}\right), \end{cases}$$

u_0 étant un arc compris entre zéro et π; l'équation (3) donnera

$$(5)\qquad u = 2k\pi \pm u_0,$$

k étant un entier; on aura ensuite, par les équations (2),

$$e^v = \frac{x}{\cos u_0} \mp \frac{y}{\sin u_0}, \quad e^{-v} = \frac{x}{\cos u_0} \pm \frac{y}{\sin u_0},$$

d'où

$$(6)\qquad v = \pm v_0,$$

le signe ambigu $\pm$ devant être fixé de la même manière que dans la formule (5). On a, d'après cela,

$$(7)\quad \arccos(x + y\sqrt{-1}) = 2k\pi \pm (u_0 + v_0\sqrt{-1});$$

par conséquent, *lorsque deux quantités réelles ou imaginaires ont le même cosinus, la somme ou la différence de ces quantités est un multiple de la circonférence.*

Dans le cas particulier de $y = 0$, les équations (1) donnent immédiatement

$$\sin u = 0 \quad \text{ou} \quad v = 0.$$

En prenant $v = 0$, on a

$$\cos u = x,$$

mais cette solution ne convient qu'au cas où la quantité x est comprise entre -1 et $+1$. En prenant $\sin u = 0$, on a

$$\cos u = \pm 1,$$

le signe de ± 1 étant celui de x. La première des équations (1) donne alors

$$\frac{e^v + e^{-v}}{2} = \pm x,$$

d'où

$$e^v = \pm x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad v = \log(\pm x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

On a donc, si x est compris entre $-\infty$ et -1,

$$(8) \qquad \arccos x = (2k+1)\pi + \sqrt{-1}\log(-x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

et, si x est compris entre $+1$ et $+\infty$,

$$(9) \qquad \arccos x = 2k\pi + \sqrt{-1}\log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

373. Les fonctions $\log z$, $\arcsin z$, ..., ainsi que les fonctions algébriques explicites non rationnelles, appartiennent à la classe des fonctions implicites u, déterminées par une équation telle que

$$F(u, z) = 0,$$

dont le premier membre est une fonction bien déterminée des deux variables z et u, et irréductible à la forme $u - f(z)$, $f(z)$ étant une fonction bien déterminée. Cette équation peut admettre, pour chaque valeur de z, un nombre fini ou infini de racines u qui varient avec z; mais, pour pouvoir considérer l'une de ces racines u en particulier comme une fonction de z, il est nécessaire de la distinguer avec soin des autres racines, parmi lesquelles il y en a qui peuvent devenir égales à celle que l'on veut étudier, pour certaines valeurs particulières de z.

De la continuité.

374. La définition de la continuité donnée au n° 12 est applicable aux fonctions d'une variable imaginaire. Ainsi :

Une fonction bien définie $f(z)$ de la variable imaginaire z est dite continue *pour les valeurs de z qui répondent aux points compris dans l'intérieur d'un contour quelconque tracé sur un plan, lorsque, pour chacune de ces valeurs de z, le module de la différence*

$$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z)$$

décroît indéfiniment en même temps que le module de Δz, c'est-à-dire devient infiniment petit avec Δz.

On voit, par cette définition, que les fonctions entières sont continues pour toutes les valeurs de z; la même chose a lieu à l'égard de la fonction e^z; car on a

$$e^{z+\Delta z} - e^z = e^z(e^{\Delta z} - 1),$$

et, en désignant par h le module de Δz, par θ une quantité dont le module est compris entre zéro et 1, on peut écrire (n° 365)

$$e^{z+\Delta z} - e^z = \frac{\theta \Delta z}{1 - h};$$

il est évident que le module de cette différence est infiniment petit en même temps que le module de Δz.

Les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ ne sont autre chose que des sommes d'exponentielles, et par conséquent elles sont fonctions continues de z pour toutes les valeurs de cette variable.

Les fonctions rationnelles non entières et les fonctions $\operatorname{tang} z$, $\cot z$, $\operatorname{séc} z$, $\cos z$ ne deviennent discontinues qu'en passant par l'infini.

Mais il n'en est pas de même à l'égard des fonctions irrationnelles, et comme la continuité joue le rôle principal dans le développement des fonctions en séries, il est nécessaire de bien fixer les idées à cet égard en étudiant complétement un cas très-simple.

Ainsi que nous l'avons dit, la variable

$$z = x + y\sqrt{-1} = \rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$$

peut prendre toutes les valeurs possibles quand on attribue à ρ les valeurs comprises entre zéro et ∞, et à ω les valeurs comprises entre $-\pi$ et $+\pi$. D'après cela, une fonction continue de z doit varier par degrés insensibles avec ρ et ω, et en outre, si ε désigne un angle réel infiniment petit, la différence des valeurs que prend la fonction pour

$$z = \rho[\cos(-\pi + \varepsilon) + \sqrt{-1}\sin(-\pi + \varepsilon)]$$

et

$$z = \rho[\cos(\pi - \varepsilon) + \sqrt{-1}\sin(\pi - \varepsilon)]$$

doit être infiniment petite, puisque la différence de ces valeurs de z, savoir $2\rho\sin\varepsilon\sqrt{-1}$, est elle-même infiniment petite; il est évident que réciproquement ces deux conditions assurent la continuité. On voit sans peine que la seconde condition peut être exprimée en disant que la fonction considérée prend des valeurs égales pour $\omega = -\pi$ et pour $\omega = +\pi$.

375. Cela posé, considérons l'expression

$$(1 + z)^m,$$

où m désigne une fraction commensurable dont le dénominateur est supérieur à 1. Si l'on fait

$$z = \rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega), \quad 1 + z = r(\cos\psi + \sqrt{-1}\sin\psi),$$

ψ étant assujetti, de même que ω, à rester entre les limites $-\pi$ et $+\pi$ sans jamais atteindre la limite inférieure, on aura

$$r\cos\psi = 1 + \rho\cos\omega, \quad r\sin\psi = \rho\sin\omega,$$

d'où

$$r = \sqrt{1 + 2\rho\cos\omega + \rho^2}, \quad \cos\psi = \frac{1 + \rho\cos\omega}{r}, \quad \sin\psi = \frac{\rho\sin\omega}{r},$$

équations qui déterminent complétement le module r et l'argument ψ. D'après cela, les valeurs de l'expression $(1 + z)^m$ seront

$$r^m(\cos m\psi + \sqrt{-1}\,\sin m\psi)(\cos 2mk\pi + \sqrt{-1}\,\sin 2mk\pi),$$

k étant un entier. On peut prendre, pour définir la fonction que nous voulons considérer, l'équation

$$(1 + z)^m = r^m(\cos m\psi + \sqrt{-1}\,\sin m\psi),$$

et je dis que cette fonction sera continue tant que le module de z sera inférieur à 1, tandis que, si ce module prend des valeurs supérieures à 1, la fonction pourra devenir et deviendra effectivement discontinue.

En effet, les formules précédentes montrent que r, $\cos\psi$, $\sin\psi$, et par suite ψ, varient par degrés insensibles si ρ et ω varient elles-mêmes par degrés insensibles, et cela quelles que soient les valeurs que l'on attribue à ρ; mais, si ρ est inférieur à 1, on voit que $\cos\psi$ est toujours positif, d'où il suit que ψ reste compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et comme on a $\sin\psi = 0$ pour $\omega = \pm\pi$, l'angle ψ s'annule pour $\omega = -\pi$ et pour $\omega = +\pi$. On voit par là que la fonction $(1 + z)^m$ varie par degrés insensibles avec ρ et ω; elle a d'ailleurs la même valeur, ρ restant le même, pour $\omega = -\pi$ et pour $\omega = +\pi$: donc elle est fonction continue de z.

Supposons maintenant que z prenne des valeurs dont le module soit supérieur à 1. Si l'on donne à ω les valeurs $-(\pi - \varepsilon)$ et $+(\pi - \varepsilon)$, ε étant un infiniment petit,

puis que l'on fasse tendre ε vers zéro, dans l'un et l'autre cas $\cos\psi$ tendra vers la limite -1, et $\sin\psi$ vers la limite zéro; mais, dans le premier cas, $\sin\psi$ atteint sa limite en passant par des valeurs négatives, tandis que, dans le second cas, le sinus est positif avant d'atteindre sa limite; il s'ensuit évidemment que l'on a $\psi = -\pi$ pour $\omega = -\pi$ et $\psi = +\pi$ pour $\omega = +\pi$. Par conséquent, la fonction $(1+z)^m$ prend pour $\omega = -\pi$ et pour $\omega = +\pi$ deux valeurs dont la différence est $2r^m \sin m\pi \sqrt{-1}$; cette différence ne se réduit à zéro que si m est un nombre entier: donc, dans tout autre cas, la fonction est discontinue.

Les mêmes considérations font voir que la fonction $\log(1+z)$ reste fonction continue pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à 1, mais qu'elle devient discontinue lorsque z prend des valeurs dont le module surpasse l'unité.

Dérivée et différentielle d'une fonction d'une variable imaginaire.

376. Nous étendrons au cas des fonctions d'une variable imaginaire les définitions de la dérivée et de la différentielle que nous avons données pour le cas d'une variable réelle. Si donc $f(z)$ désigne une fonction de la variable imaginaire $z = x + y\sqrt{-1}$, la dérivée $f'(z)$ sera, par définition, la limite vers laquelle tend le rapport

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

ou

$$\frac{f(x + y\sqrt{-1} + \Delta x + \Delta y\sqrt{-1}) - f(x + y\sqrt{-1})}{\Delta x + \Delta y\sqrt{-1}},$$

lorsque $\Delta z = \Delta x + \Delta y\sqrt{-1}$ tend vers zéro, ce qui

exige que Δx et Δy tendent simultanément vers zéro. On aura aussi, pour la différentielle de $f(z)$,

$$df(z) = f'(z)\,dz.$$

Une variable est fonction de plusieurs autres, lorsqu'elle prend une valeur déterminée quand on attribue à celles-ci des valeurs déterminées. Partant de cette définition, Cauchy a considéré toute fonction $\varphi(x, y)$ des deux variables réelles x et y comme une fonction de $x + y\sqrt{-1}$ ou de z. La dérivée $\frac{d\varphi(x,y)}{dz}$, savoir

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dz} = \lim \frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x,y)}{\Delta x + \Delta y\sqrt{-1}},$$

est alors généralement indéterminée et sa valeur dépend de la limite $\frac{dy}{dx}$ vers laquelle converge le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand Δx et Δy tendent vers zéro. A ce point de vue, il y a lieu de distinguer les fonctions en deux classes, suivant qu'elles ont une dérivée unique ou une infinité de dérivées ; nous nous bornons à indiquer ici cette conception, dont nous ne chercherons à tirer aucune conséquence.

Les règles de la différentiation des fonctions algébriques n'ont à subir aucune modification, lorsque la variable devient imaginaire ; il s'ensuit que ces fonctions ont des dérivées déterminées. La même chose a lieu à l'égard des fonctions exponentielles, logarithmiques ou circulaires, car les règles relatives à ces fonctions reposent uniquement sur ce fait, que les expressions $\frac{e^h - 1}{h}$, $\frac{\sin h}{h}$ tendent vers l'unité quand h tend vers zéro, et cela résulte immédiatement des définitions des fonctions e^z et $\sin z$ pour une variable imaginaire z. On voit donc que toutes les fonctions composées avec les *fonctions élémentaires* de l'ana-

lyse auront une dérivée unique déterminée, et dans ce qui va suivre nous ne considérerons que de telles fonctions.

377. Soit $f(z)$ une fonction de la variable

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

continue dans une certaine étendue et ayant pour dérivée $f'(z)$; $f(z)$ peut être considérée comme une fonction de x et de y, et l'on a

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = \lim \frac{\Delta f(z)}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} \times \lim \frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial y} = \lim \frac{\Delta f(z)}{\Delta y} = \lim \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} \times \lim \frac{\Delta z}{\Delta y} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial y};$$

d'ailleurs

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{-1},$$

donc

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} + \frac{\partial f(z)}{\partial y}\sqrt{-1} = 0.$$

Remplaçons z par $x + y\sqrt{-1}$ dans $f(z)$, et faisons

$$f(z) = \varphi(x, y) + \psi(x, y)\sqrt{-1},$$

φ et ψ désignant des fonctions réelles, l'équation précédente devient

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\sqrt{-1}\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\sqrt{-1}\right) = 0,$$

et elle se décompose en deux autres, savoir

$$(1) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\varphi \partial}{y \partial}.$$

Si l'on différentie ces équations par rapport à x et par

rapport à y, on trouvera

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2};$$

d'où

$$(2)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0.$$

Ainsi l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}=0$$

est satisfaite en posant

$$\Theta=\varphi(x,y)\quad\text{et}\quad\Theta=\psi(x,y).$$

378. Nous établirons encore ici une autre formule qui nous sera utile. Introduisons les coordonnées polaires ρ et ω au lieu des coordonnées rectangulaires, et faisons

$$z=\rho e^{\omega\sqrt{-1}};$$

d'où

$$\frac{\partial z}{\partial\rho}=e^{\omega\sqrt{-1}}=\frac{z}{\rho},\quad \frac{\partial z}{\partial\omega}=\rho e^{\omega\sqrt{-1}}\sqrt{-1}=z\sqrt{-1}.$$

Si la fonction $f(z)$ admet une dérivée $f'(z)$ bien déterminée, on aura, en opérant comme au numéro précédent,

$$\frac{\partial f(z)}{\partial\rho}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial\rho},\quad \frac{\partial f(z)}{\partial\omega}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial\omega},$$

d'où

$$\frac{\partial f(z)}{\partial\rho}\frac{\partial z}{\partial\omega}=\frac{\partial f(z)}{\partial\omega}\frac{\partial z}{\partial\rho};$$

ajoutant à chaque membre la quantité $f(z)\dfrac{\partial^2 z}{\partial\rho\,\partial\omega}$, on

aura

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \omega}+f(z)\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial \omega}}{\partial \rho}=\frac{\partial f(z)}{\partial \omega}\frac{\partial z}{\partial \rho}+f(z)\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial \rho}}{\partial \omega},$$

ou

$$\frac{\partial\left[f(z)\frac{\partial z}{\partial \omega}\right]}{\partial \rho}=\frac{\partial\left[f(z)\frac{\partial z}{\partial \rho}\right]}{\partial \omega};$$

telle est la formule que nous voulions établir; en y remplaçant $\frac{\partial z}{\partial \omega}$ et $\frac{\partial z}{\partial \rho}$ par leurs valeurs écrites plus haut, elle devient

$$(3)\qquad \frac{\partial\left[\frac{z}{\rho}f(z)\right]}{\partial \omega}=\frac{\partial[zf(z)]}{\partial \rho}\sqrt{-1}.$$

Démonstration d'un théorème de Cauchy.

379. Soit $f(x)$ une fonction réelle d'une variable réelle x, qui reste continue pour les valeurs de x comprises entre les limites x_0 et X.

Désignons par x une valeur quelconque comprise entre x_0 et X; divisons l'intervalle $x - x_0$ en un nombre n de parties égales ou inégales et représentons ces parties par

$$x_1 - x_0,\quad x_2 - x_1,\quad \ldots,\quad (x - x_{n-1});$$

la somme

$$(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots$$
$$+ (x_{n-1} - x_{n-2})f(x_{n-2}) + (x - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

tend vers une limite déterminée lorsque le nombre n augmente indéfiniment et que chacune des différences $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... tend vers zéro. Cette limite est une fonction de x que nous représenterons par $F(x)$, et

si l'on construit la courbe dont l'ordonnée est $f(x)$, relativement à deux axes rectangulaires, la limite $F(x)$ ne sera autre chose (n° 188) que l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les ordonnées qui répondent aux abscisses x_0 et x; en conséquence on aura

$$\partial F(x) = f(x)\, \partial x.$$

Si les différences $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... sont égales entre elles et que l'on représente par h leur valeur commune, on aura

$$F(x) = (x - x_0) \lim \frac{f(x_0) + f(x_0 + h) + \ldots + f[x_0 + (n-1)h]}{n}$$

et

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = f(x);$$

on a, en outre, évidemment

$$F(x_0) = 0.$$

Soient $f_1(x)$ et $f_2(x)$ deux fonctions réelles et continues pour les valeurs de x comprises entre x_0 et X; il existera, d'après ce qui précède, deux fonctions $F_1(x)$, $F_2(x)$ telles, que les formules précédentes auront lieu quand on fera simultanément $f = f_1$, $F = F_1$ ou $f = f_2$ et $F = F_2$; donc les mêmes formules auront lieu encore, si l'on pose

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)\sqrt{-1}, \quad F(x) = F_1(x) + F_2(x)\sqrt{-1}.$$

380. Soit $f(z)$ une fonction bien déterminée de la variable

$$z = \rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega) = \rho e^{\omega\sqrt{-1}},$$

et qui reste continue pour les valeurs de ρ comprises entre certaines limites.

Si l'on attribue au module ρ une valeur déterminée, la fonction $f(z)$ ne dépendra plus que de l'argument ω;

donnons alors à ω les n valeurs en progression arithmétique

$$-\pi,\quad -\pi+\frac{2\pi}{n},\quad \ldots,\quad -\pi+\frac{2i\pi}{n},\quad \ldots,\quad -\pi+\frac{2(n-1)\pi}{n},$$

et désignons par

$$z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_{n-1}$$

les valeurs de z qui répondent à ces arguments. La moyenne arithmétique des valeurs correspondantes de $f(z)$, savoir

$$\frac{f(z_0)+f(z_1)+\ldots+f(z_{n-1})}{n},$$

tendra vers une limite que Cauchy a nommée la *valeur moyenne de $f(z)$ correspondant au module ρ*; nous la représenterons par $\mathfrak{M}f(z)$ et l'on aura en conséquence

$$\mathfrak{M}f(z)=\lim\frac{f(z_0)+f(z_1)+\ldots+f(z_{n-1})}{n}\quad\text{pour}\quad n=\infty.$$

381. Cauchy a nommé module *maximum* d'une fonction $f(z)$ relatif au module ρ de z, le plus grand des modules que prend $f(z)$ quand ω varie de $-\pi$ à $+\pi$. Le module d'une somme étant inférieur à la somme des modules des parties, la formule précédente montre que le module de la valeur moyenne $\mathfrak{M}[f(z)]$ est inférieur au module maximum de $f(z)$.

Supposons

$$f(z)=z^\mu,$$

μ étant un entier positif ou négatif. On aura

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}[z^\mu]&=\rho^\mu e^{-\mu\pi\sqrt{-1}}\lim\frac{1+e^{\frac{2\mu\pi}{n}\sqrt{-1}}+\ldots+e^{\frac{2(n-1)\mu\pi}{n}\sqrt{-1}}}{n}\\&=\rho^\mu e^{-\mu\pi\sqrt{-1}}\lim\frac{1-e^{2\mu\pi\sqrt{-1}}}{n\left(1-e^{-\frac{2\mu\pi}{n}\sqrt{-1}}\right)},\end{aligned}$$

et si μ ne se réduit pas à zéro, cette formule montre que l'on a

$$\mathfrak{M}[z^\mu] = 0.$$

382. Les notions que nous venons de présenter suffisent pour établir un théorème important dû à Cauchy; ce théorème est le suivant :

THÉORÈME. — *Soit $f(z)$ une fonction de la variable imaginaire $z = \rho e^{\omega\sqrt{-1}}$, qui reste continue pour toutes les valeurs de z dont le module n'est pas supérieur à une quantité donnée R. Si l'on désigne par Z la valeur que prend z quand on fait $\rho = R$, la valeur moyenne de la fonction $Zf(Z)$ sera nulle. Ainsi l'on aura, d'après la notation convenue,*

$$\mathfrak{M}[Zf(Z)] = 0.$$

En effet, posons

$$(1) \qquad zf(z)\sqrt{-1} = \varphi(\rho, \omega), \quad \frac{z}{\rho}f(z) = \psi(\rho, \omega),$$

on aura, par la formule (3) du n° 378,

$$(2) \qquad \frac{\partial \varphi(\rho, \omega)}{\partial \rho} = \frac{\partial \psi(\rho, \omega)}{\partial \omega}.$$

Regardons ρ comme une constante, $\varphi(\rho, \omega)$ sera une fonction continue de ω; si donc on fait

$$\omega = -\pi + n\alpha,$$

et

$$(3) \left\{ \begin{aligned} &\Phi(\rho, \omega) \\ &= (\omega + \pi)\lim \frac{\varphi(\rho, -\pi) + \varphi(\rho, -\pi+\alpha) + \ldots + \varphi[\rho, -\pi + (n-1)\alpha]}{n}, \text{ pour } n = \infty; \end{aligned} \right.$$

$\Phi(\rho, \omega)$ sera une fonction déterminée s'annulant pour

$\omega = -\pi$, et l'on aura (n° 379)

$$(4) \qquad \frac{\partial \Phi(\rho, \omega)}{\partial \omega} = \varphi(\rho, \omega).$$

Pareillement, si l'on regarde ω comme une constante, $\psi(\rho, \omega)$ sera fonction continue de ρ, tant que l'on aura $\rho < \mathrm{R}$ ou $= \mathrm{R}$, et si l'on fait

$$\rho = n\delta,$$

puis

$$(5) \quad \Psi(\rho, \omega) = \rho \lim \frac{\psi(0, \omega) + \psi(\delta, \omega) + \ldots + \psi[(n-1)\delta, \omega]}{n}, \text{ pour } n = \infty:$$

$\Psi(\rho, \omega)$ sera une fonction bien déterminée qui s'annulera avec ρ, et l'on aura (n° 379)

$$(6) \qquad \frac{\partial \Psi(\rho, \omega)}{\partial \rho} = \psi(\rho, \omega).$$

Maintenant différentions l'équation (4) par rapport à ρ, et l'équation (6) par rapport à ω; nous aurons, à cause de la formule (2),

$$\frac{\partial^2 \Phi(\rho, \omega)}{\partial \rho\, \partial \omega} - \frac{\partial^2 \Psi(\rho, \omega)}{\partial \rho\, \partial \omega} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial \left[\frac{\partial \Phi(\rho, \omega)}{\partial \rho} - \frac{\partial \Psi(\rho, \omega)}{\partial \rho} \right]}{\partial \omega} = 0.$$

Cette formule montre que la fonction

$$\frac{\partial \Phi(\rho, \omega)}{\partial \rho} - \frac{\partial \Psi(\rho, \omega)}{\partial \rho}$$

est indépendante de ω; on obtiendra donc des valeurs égales en y faisant $\omega = -\pi$ et $\omega = +\pi$; ainsi l'on a

$$\frac{\partial \Phi(\rho, +\pi)}{\partial \rho} - \frac{\partial \Psi(\rho, +\pi)}{\partial \rho} = \frac{\partial \Phi(\rho, -\pi)}{\partial \rho} - \frac{\partial \Psi(\rho, -\pi)}{\partial \rho}.$$

Or, par hypothèse, la fonction $\psi(\rho, \omega)$ a la même valeur pour $\omega = -\pi$ et pour $\omega = +\pi$; la même chose a lieu, en conséquence, pour $\Psi(\rho, \omega)$, d'après la formule (5), ainsi que pour la dérivée $\frac{\partial \Psi(\rho, \omega)}{\partial \rho}$; d'ailleurs la fonction $\Phi(\rho, -\pi)$ est nulle; donc la formule précédente se réduit à

$$\frac{\partial \Phi(\rho, +\pi)}{\partial \rho} = 0.$$

Il résulte de là que la fonction $\Phi(\rho, +\pi)$ se réduit à une constante, et, par conséquent, on a

$$(7) \qquad \Phi(R, +\pi) = \Phi(0, +\pi).$$

Enfin, $f(z)$ étant continue pour les valeurs de z dont le module ne surpasse pas R, cette fonction ne peut être infinie pour $\rho = 0$; il s'ensuit que le produit

$$z f(z) \sqrt{-1} = \varphi(\rho, \omega)$$

s'annule pour $\rho = 0$, et il en est de même de $\Phi(\rho, \omega)$ d'après la formule (3). On a donc par la formule (7)

$$\Phi(R, \pi) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(8) \qquad \mathcal{M}[Z f(Z)] = 0;$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Corollaire I. — *Soit* $F(z)$ *une fonction d'une variable imaginaire* $z = \rho e^{\omega\sqrt{-1}}$, *qui reste continue pour les valeurs de* z *dont le module* ρ *n'est pas supérieur à* R. *Si l'on désigne par* Z *la valeur que prend* z *quand on remplace* ρ *par* R, *et par* x *une constante réelle ou imaginaire dont le module* r *soit compris entre zéro et*

R, *on aura*

$$\mathrm{F}(x) = \mathfrak{M}\left[\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-x}\,\mathrm{F}(\mathrm{Z})\right].$$

En effet, la fonction $\mathrm{F}(z)$ étant continue tant que ρ n'est pas supérieur à R, il en est de même de la fonction

$$(9)\qquad f(z) = \frac{\mathrm{F}(z)-\mathrm{F}(x)}{z-x};$$

il ne saurait effectivement se présenter de discontinuité que quand z atteint la valeur x; la fonction $f(z)$ prend alors la valeur

$$\lim \frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h} = \mathrm{F}'(x),$$

quantité qui est nécessairement finie, en vertu de nos hypothèses, comme on le verra plus bas.

D'après cela, on peut appliquer le précédent théorème à la fonction $f(z)$ définie par la formule (9); on a donc, par la forme (8),

$$\mathfrak{M}\left[\mathrm{Z}\,\frac{\mathrm{F}(\mathrm{Z})-\mathrm{F}(x)}{\mathrm{Z}-x}\right] = 0,$$

ou

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{M}\left[\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-x}\,\mathrm{F}(\mathrm{Z})\right] &= \mathfrak{M}\left[\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-x}\,\mathrm{F}(x)\right] \\ &= \mathrm{F}(x)\,\mathfrak{M}\left(\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-x}\right). \end{aligned}\right.$$

Or on a

$$(11)\qquad \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-x} = 1 + \frac{x}{\mathrm{Z}} + \frac{x^2}{\mathrm{Z}^2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{\mathrm{Z}^{n-1}} + \frac{x^n}{\mathrm{Z}^n\left(1-\frac{x}{\mathrm{Z}}\right)};$$

d'ailleurs la valeur moyenne de $\frac{1}{z^\mu}$ est nulle (n° 381)

quand μ ne se réduit pas à zéro, et cette valeur moyenne est évidemment égale à l'unité, quand $\mu = 0$; donc

$$\mathfrak{M}\left[\frac{Z}{Z-x}\right] = 1 + \mathfrak{M}\,\frac{x^n}{Z^n\left(1-\frac{x}{Z}\right)}.$$

Le module de $\mathfrak{M}\left[\dfrac{x^n}{Z^n\left(1-\frac{x}{Z}\right)}\right]$ est inférieur (n° 380) au module maximum de la fonction $\dfrac{x^n}{Z^n\left(1-\frac{x}{Z}\right)}$, lequel est au plus égal au produit de $\left(\frac{r}{R}\right)^n$ par le module maximum $\dfrac{1}{1-\frac{r}{R}}$ de $\dfrac{1}{1-\frac{x}{Z}}$, et comme $\left(\frac{r}{R}\right)^n$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, on a

$$\mathfrak{M}\left[\frac{Z}{Z-x}\right] = 1;$$

la formule (9) donne alors

$$F(x) = \mathfrak{M}\left[\frac{Z}{Z-x}\,F(Z)\right], \tag{12}$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Corollaire II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le corollaire I, la dérivée d'ordre μ de la fonction* $F(x)$ *a pour valeur*

$$F^{(\mu)}(x) = 1.2\ldots\mu\,\mathfrak{M}\left[\frac{Z}{(Z-x)^{\mu+1}}\,F(Z)\right]. \tag{13}$$

Cette formule comprendra la formule (12) si l'on convient de remplacer le produit $1.2\ldots\mu$ par l'unité et $F^{(\mu)}(x)$ par $F(x)$ quand μ est nul; donc, pour établir la for-

mule (13), il suffit de démontrer que, si elle a lieu pour une valeur de μ, elle subsiste encore pour la valeur suivante. A cet effet, remplaçons x par $x+h$ dans la formule (13), on aura

$$F^{(\mu)}(x+h) = 1.2\ldots\mu\,\mathfrak{M}\left[\frac{Z}{(Z-x-h)^{\mu+1}}F(Z)\right],$$

et, par suite,

$$\frac{F^{(\mu)}(x+h)-F^{(\mu)}(x)}{h}$$
$$= 1.2\ldots\mu\,\mathfrak{M}\left[\frac{Z\,F(Z)}{(Z-x-h)^{\mu+1}(Z-x)}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{ZF(Z)}{(Z-x-h)(Z-x)^{\mu+1}}\right];$$

faisant $h=0$, on a

$$F^{(\mu+1)}(x) = 1.2\ldots(\mu+1)\,\mathfrak{M}\left[\frac{Z}{(Z-x)^{\mu+2}}F(Z)\right],$$

ce qui n'est autre chose que la formule (13), où l'on a remplacé μ par $\mu+1$.

Remarque. — Pour établir la formule (12), nous avons admis que $F'(x)$ ne peut pas devenir infinie pour une valeur de x dont le module est inférieur à R ; nous allons actuellement le démontrer. Supposons que $F'(x)$ puisse être infinie pour diverses valeurs de x dont les modules soient compris entre zéro et R, et soit $ae^{\alpha\sqrt{-1}}$ celle de ces valeurs qui a le plus grand module. La formule (12) subsistera sans difficulté pour les valeurs de x dont les modules sont compris entre a et R, et, en la différentiant, on aura encore

$$F'(x) = \mathfrak{M}\left[\frac{Z}{(Z-x)^2}F(Z)\right].$$

Donnons à x l'argument α et faisons tendre le module de

cette variable vers la limite a; le second membre restera évidemment fini et tendra vers une limite déterminée; par conséquent le premier membre, qui est égal au second, ne pourra devenir infini, comme on l'a supposé.

Il résulte de là que la formule (12) exige seulement que le module de x soit inférieur au module R.

Formule de Maclaurin.

383. Cauchy a déduit de ce qui précède le beau théorème suivant :

THÉORÈME. — *La fonction* $F(x)$ *sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances entières et ascendantes de* x, *si le module de la variable réelle ou imaginaire* x *conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction* $F(x)$ *cesse d'être continue.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remplacer, dans la formule (12) du numéro précédent, $\frac{Z}{Z-x}$ par la valeur tirée de la formule (11); il vient alors

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) &= \mathfrak{M}[F(Z)] + x\,\mathfrak{M}\left[\frac{F(Z)}{Z}\right] + \ldots \\ &\quad + x^{n-1}\,\mathfrak{M}\left[\frac{F(Z)}{Z^{n-1}}\right] + R_n, \end{aligned}\right.$$

en faisant

$$(2)\quad R_n = \mathfrak{M}\left[\frac{x^n}{Z^n}\,\frac{F(Z)}{1-\frac{x}{Z}}\right] = \left(\frac{x}{R}\right)^n \mathfrak{M}\left[\frac{F(Z)\,e^{-n\omega\sqrt{-1}}}{1-\frac{x}{Z}}\right].$$

Le module de x étant, par hypothèse, inférieur à R, le facteur $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ tend vers zéro, quand n augmente indéfini-

ment, et la quantité qu'il multiplie, dans l'expression de R_n, conserve évidemment une valeur finie; on a donc

$$\lim R_n = 0,$$

ct, par conséquent,

$$(3)\quad F(x) = \mathfrak{M}[F(Z)] + x\,\mathfrak{M}\left[\frac{F(Z)}{Z}\right] + x^2\,\mathfrak{M}\left[\frac{F(Z)}{Z^2}\right] + \cdots,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Les formules (12) et (13) du n° 382 donnent, pour $x = 0$,

$$F(0) = \mathfrak{M}[F(Z)],$$
$$F^{\mu}(0) = 1.2\ldots\mu\,\mathfrak{M}\left[\frac{F(Z)}{Z^{\mu}}\right];$$

on peut alors écrire la formule (3) comme il suit:

$$(4)\qquad F(x) = F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \frac{x^2}{1.2}F''(0) + \ldots,$$

ce qui est la formule de Maclaurin.

384. Les fonctions $(1+z)^m$ et $\log(1+z)$, définies comme nous l'avons fait plus haut, étant continues pour les valeurs de z dont le module est inférieur à 1, on aura pour ces valeurs de z

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \ldots,$$
$$\log(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots.$$

En écrivant $\rho e^{\omega\sqrt{-1}}$ au lieu de z, cette dernière formule devient

$$\log(1 + \rho\cos\omega + \rho\sin\omega\sqrt{-1}) = \frac{\rho e^{\omega\sqrt{-1}}}{1} - \frac{\rho^2 e^{2\omega\sqrt{-1}}}{2} + \ldots.$$

Posons

$$1 + \rho\cos\omega = r\cos\psi,\quad \rho\sin\omega = r\sin\psi;$$

l'angle ψ devra être compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, à cause de $\rho < 1$, et il est, en conséquence, déterminé par sa tangente dont la valeur est

$$\text{tang}\,\psi = \frac{\rho \sin \omega}{1 + \rho \cos \omega}.$$

On a d'ailleurs

$$r = \sqrt{1 + 2\rho \cos \omega + \rho^2},$$

puis

$$\log(1 + \rho \cos \omega + \rho \sin \omega \sqrt{-1}) = \log r + \psi \sqrt{-1};$$

donc

$$\log \sqrt{1 + 2\rho \cos \omega + \rho^2} + \sqrt{-1}\ \text{arc tang}\, \frac{\rho \sin \omega}{1 + \rho \cos \omega}$$
$$= \frac{\rho e^{\omega\sqrt{-1}}}{1} - \frac{\rho^2 e^{2\omega\sqrt{-1}}}{2} + \frac{\rho^3 e^{3\omega\sqrt{-1}}}{3} - \ldots.$$

Égalant de part et d'autre les parties réelles et les parties multipliées par le facteur $\sqrt{-1}$, il vient

$$\log \sqrt{1 + 2\rho \cos \omega + \rho^2} = \frac{\rho \cos \omega}{1} - \frac{\rho^2 \cos 2\omega}{2} + \frac{\rho^3 \cos 3\omega}{3} - \ldots,$$
$$\text{arc tang}\, \frac{\rho \sin \omega}{1 + \rho \cos \omega} = \frac{\rho \sin \omega}{1} - \frac{\rho^2 \sin 2\omega}{2} + \frac{\rho^3 \sin 3\omega}{3} - \ldots,$$

formules qui subsistent pour toutes les valeurs de ρ inférieures à 1, pourvu que l'arc de la seconde formule soit pris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Si l'on fait dans cette dernière formule $\rho \sin \omega = x$, $\rho \cos \omega = 0$, d'où $\omega = \pm \frac{\pi}{2}$, il viendra

$$\text{arc tang}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$$

ou, en posant $x = \tang z$,

$$z = \frac{\tang z}{1} - \frac{\tang^3 z}{3} + \frac{\tang^5 z}{5} - \ldots;$$

cette dernière formule subsiste pour les valeurs réelles de z comprises entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$.

385. Les fonctions e^z, $\cos z$ et $\sin z$ restent continues pour toutes les valeurs de z : donc elles sont toujours développables en séries convergentes; mais il faut remarquer que ces développements en séries sont, pour nous, l'expression même de la définition des fonctions dont nous parlons ; il n'y a donc aucune conséquence à tirer relativement à celles-ci. Il y aurait lieu à un théorème concernant la fonction e^z, par exemple, si l'on prenait pour définition de e^z l'équation

$$e^z = e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x \cos y + \sqrt{-1}\, e^x \sin y.$$

Les fonctions $\frac{1}{e^z - 1}$ et $\frac{z}{2} \cot \frac{z}{2}$ ne cessent d'être continues qu'en devenant infinies, la première pour des valeurs de z multiples de $2\pi\sqrt{-1}$, la seconde pour des valeurs de z multiples de 2π; donc ces fonctions sont développables en séries convergentes pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de z dont le module est inférieur à 2π. Pareillement, la fonction $\tang z$ reste continue pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à $\frac{\pi}{2}$; elle est donc, pour ces valeurs de z, développable en série convergente par la formule de Maclaurin. J'ai démontré ces résultats par une méthode particulière, dans mon *Traité de Trigonométrie* (5ᵉ édition); je renverrai à cet Ouvrage pour les détails des développements en série dont je viens de parler.

Les fonctions $z^{\frac{q}{p}}$, $\log z$, $e^{\frac{1}{z}}$ sont discontinues pour une valeur nulle du module, et elles ne sont développables en séries ordonnées suivant les puissances entières, positives et ascendantes de z, pour aucune valeur de cette variable.

Formule de Lagrange.

386. Désignons par x une constante donnée, par t une variable réelle ou imaginaire, et considérons l'équation

$$z = x + tf(z), \tag{1}$$

dans laquelle z est une inconnue et $f(z)$ une fonction continue de z indépendante de x et de t. Cette équation aura un nombre limité ou illimité de racines z selon que la fonction $f(z)$ sera algébrique ou transcendante; pour $t = 0$, l'une de ces racines se réduira à x et les autres deviendront infinies. Pour que l'équation (1) ait deux racines égales, il faut qu'elle soit vérifiée en même temps que sa dérivée prise par rapport à z, savoir

$$1 = tf'(z), \tag{2}$$

et, en éliminant t entre les équations (1) et (2), on aura

$$z = x + \frac{f(z)}{f'(z)}. \tag{3}$$

Les racines de cette équation (3) sont indépendantes de t; désignons-les par $a_1 e^{\alpha_1\sqrt{-1}}$, $a_2 e^{\alpha_2\sqrt{-1}}$, ... et portons-les successivement dans l'équation (2), on aura

$$t = \frac{1}{f'\left(a_1 e^{\alpha_1\sqrt{-1}}\right)}, \quad t = \frac{1}{f'\left(a_2 e^{\alpha_2\sqrt{-1}}\right)}, \ldots,$$

formules qui font connaître les valeurs qu'il faut attri-

buer à t, pour que deux racines de l'équation (1) soient égales entre elles. Désignons par R le module de celle de ces valeurs qui a le plus petit module ; il est évident que l'équation (1) n'aura point de racines égales tant que le module de la variable t restera inférieure à R, et par conséquent les racines de cette équation ne pourront vérifier l'équation (2).

Cela posé, je dis que, si le module de t reste compris entre zéro et R, les racines de l'équation (1) varieront par degrés insensibles avec t. En effet, donnons à t une valeur t_0 dont le module soit compris entre zéro et R, et désignons par z_0 l'une des racines de l'équation (1); on aura $t_0 = \frac{z_0 - x}{f(z_0)}$ et si, prenant pour Δz_0 une quantité infiniment petite, on détermine Δt_0 par l'équation $t_0 + \Delta t_0 = \frac{z_0 + \Delta z_0 - x}{f(z_0 + \Delta z_0)}$, il est clair que l'équation (1) aura pour racine $z_0 + \Delta z_0$ lorsqu'on donnera à t la valeur $t_0 + \Delta t_0$. La différence de nos deux valeurs de t est

$$\Delta t_0 = \frac{z_0 + \Delta z_0 - x}{f(z_0 + \Delta z_0)} - \frac{z_0 - x}{f(z_0)}$$
$$= \frac{\Delta z_0 - t_0[f(z_0 + \Delta z_0) - f(z_0)]}{f(z_0 + \Delta z_0)},$$

et, comme la fonction $f(z)$ est supposée continue, la formule de Maclaurin lui est applicable; on a donc, en négligeant les infiniment petits du deuxième ordre,

$$\Delta t_0 = \frac{1 - t_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \Delta z_0, \quad \text{d'où} \quad \Delta z_0 = \frac{f(z_0)}{1 - t_0 f'(z_0)} \Delta t_0.$$

Le dénominateur $1 - t_0 f'(z_0)$ ne pouvant être nul, on voit que, si la valeur t_0 produit une racine z_0, la valeur $t_0 + \Delta t_0$ produira une racine $z_0 + \Delta z_0$, dont la différence à z_0 deviendra infiniment petite avec Δt_0.

Mais toutes les racines de l'équation (1) deviennent infinies pour $t = 0$, à l'exception d'une seule qui se réduit à x; celle-ci peut être considérée, d'après ce qui précède, comme une fonction continue de t pour toutes les valeurs de cette variable dont le module est inférieur à R, et, pour ces valeurs, elle est développable en série convergente, par la formule de Maclaurin.

387. Désignons donc par z la fonction qui vient d'être définie, on aura

$$(4)\quad z = z_0 + \frac{t}{1}\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_0 + \frac{t^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3z}{dt^3}\right)_0 + \ldots,$$

$z_0, \left(\frac{dz}{dt}\right)_0, \ldots$ exprimant les valeurs que prennent $z, \frac{dz}{dt}, \ldots$ pour $t = 0$. Et, si $F(z)$ désigne une fonction continue de z, indépendante de t et de x, on aura plus généralement

$$(5)\quad F(z) = F(z_0) + \frac{t}{1}\left[\frac{dF(z)}{dt}\right]_0 + \frac{t^2}{1.2}\left[\frac{d^2F(z)}{dt^2}\right]_0 + \ldots.$$

Il nous reste à calculer les coefficients de ce développement. Pour cela, considérons ici le paramètre x comme une variable. Si l'on différentie l'équation (1) d'abord par rapport à t, puis par rapport à x, il viendra

$$(6)\quad [1 - tf'(z)]\frac{\partial z}{\partial t} = f(z), \quad [1 - tf'(z)]\frac{\partial z}{\partial x} = 1,$$

d'où l'on tire

$$(7)\qquad \frac{\partial z}{\partial t} = f(z)\frac{\partial z}{\partial x}.$$

En différentiant les deux membres de cette formule par rapport à x, et en multipliant ensuite par une fonc-

tion arbitraire $\varphi(z)$ de z, on a

$$\varphi(z)\frac{\partial\frac{\partial z}{\partial x}}{\partial t}=\varphi(z)\frac{\partial\left[f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x};$$

ajoutant cette formule avec la formule (7) multipliée par $\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\varphi(z)}{\partial x}$, il vient

$$\varphi(z)\frac{\partial\frac{\partial z}{\partial x}}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(z)}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(z)\frac{\partial\left[f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x}+\frac{\partial\varphi(z)}{\partial x}\left[f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right],$$

ou

$$(8)\qquad \frac{\partial\left[\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial t}=\frac{\partial\left[f(z)\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x}.$$

Cette formule (8) nous montre que, si l'on doit prendre la dérivée, par rapport à t, d'une expression de la forme $\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}$, il suffira de multiplier cette expression par $f(z)$ et de prendre la dérivée du produit par rapport à x.

Différentions l'équation (8) $n-2$ fois par rapport à t; on pourra, dans le second membre, intervertir l'ordre des différentiations relatives à t et x, et l'on aura

$$\frac{\partial^{n-1}\left[\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial t^{n-1}}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{n}\cdot\left[f(z)\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial t^{n-2}};$$

mais, dans le second membre, chaque différentiation relative à t peut être remplacée par une différentiation relative à x, pourvu qu'on introduise d'abord un facteur $f(z)$; on aura donc

$$(9)\qquad \frac{\partial^{n-1}\left[\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial t^{n-1}}=\frac{\partial^{n-1}\left\{[f(z)]^{n-1}\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right\}}{\partial x^{n-1}},$$

et si l'on fait

$$\varphi(z) = f(z)\,F'(z),$$

d'où, à cause de l'équation (7),

$$\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x} = F'(z)\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial F(z)}{\partial t},$$

il viendra

$$(10) \qquad \frac{\partial^n F(z)}{\partial t^n} = \frac{\partial^{n-1}\left\{[f(z)]^n F'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right\}}{\partial x^{n-1}}.$$

Faisons maintenant $t = 0$, on aura, par l'équation (1),

$$z_0 = x, \quad F(z_0) = F(x),$$

puis, par les équations (6),

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0 = f(x),$$

d'où

$$\left[\frac{\partial F(z)}{\partial t}\right]_0 = F'(z_0)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0 = f(x)F'(x);$$

enfin la formule (10) donne

$$\left[\frac{\partial^n F(z)}{\partial t^n}\right]_0 = \frac{d^{n-1}[f(x)]^n F'(x)}{dx^{n-1}};$$

en sorte que la formule (5) devient

$$(11) \quad \begin{cases} F(z) = F(x) + \frac{t}{1} f(x)F'(x) + \frac{t^2}{1.2}\frac{d[f(x)]^2 F'(x)}{dx} + \ldots \\ \qquad + \frac{t^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}[f(x)]^n F'(x)}{dx^{n-1}} + \ldots; \end{cases}$$

c'est la formule connue sous le nom de *formule de Lagrange*.

Si la fonction $F(z)$ se réduit à z, on a

$$(12) \quad z = x + \frac{t}{1} f(x) + \frac{t^2}{1.2}\frac{d[f(x)]^2}{dx} + \ldots + \frac{t^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}[f(x)]^n}{dx^{n-1}} + \ldots.$$

Remarque. — Si la dérivée $F'(z)$ reste continue, la fonction $\frac{F'(z)}{1-tf'(z)} = F'(z)\frac{\partial z}{\partial x}$ est développable, par la formule de Maclaurin, en série convergente ordonnée suivant les puissances de t, tant que l'on a mod. $t < R$. Pour avoir les coefficients du développement, il suffit de remplacer $\varphi(z)$ par $F'(z)$ dans la formule (9), et de faire ensuite $t=0$, $z=x$, $\frac{\partial z}{\partial x}=1$; on obtient de cette manière

$$F'(z)\frac{\partial z}{\partial x} = F'(x) + \frac{t}{1}\frac{df(x)F'(x)}{dx} + \frac{t^2}{1.2}\frac{d^2[f(x)]^2F'(x)}{dx^2} + \ldots,$$

ce qui n'est autre chose que le résultat de la différentiation de la formule (11) par rapport à x.

Applications de la formule de Lagrange.

388. Proposons-nous de développer en série ordonnée, suivant les puissances croissantes de t, la fonction continue z, définie par l'équation

$$z = x + tz^m,$$

m étant un nombre entier positif. L'équation (3) du n° 386 se réduit ici à

$$z = x + \frac{z}{m}, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{mx}{m-1};$$

l'équation du même numéro (2) donne ensuite

$$t = \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m x^{m-1}},$$

et nous devons nous borner à donner à t des valeurs dont le module soit inférieur à la valeur numérique de

$$R = \pm\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m x^{m-1}};$$

la valeur de z donnée par la formule (11) du nº 387 devient alors

$$z = x + x^m t + \frac{2m}{1.2} x^{2m-1} t^2 + \frac{3m(3m-1)}{1.2.3} x^{3m-2} t^3 + \ldots$$
$$+ \frac{nm(nm-1)\ldots(nm-n+2)}{1.2\ldots n} x^{mn-n+1} t^n + \ldots.$$

Le terme général de cette série a pour valeur

$$u_n = \frac{nm(nm-1)\ldots(nm-n+2)}{1.2\ldots n} x^{nm-n+1} t^n,$$

et l'on a, par suite,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \frac{(nm+m)(nm+m-1)\ldots(nm+1)}{(nm-n+2)\ldots(nm-n+m)} x^{m-1} t;$$

la limite de ce rapport pour $n = \infty$ est égale à

$$\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}} x^{m-1} t, \quad \text{ou à} \quad \pm \frac{t}{R},$$

et l'on reconnaît ainsi, par les règles ordinaires de l'Algèbre, que notre série n'est convergente que pour les valeurs de t dont le module est inférieur à R.

389. L'emploi de la formule de Lagrange est souvent avantageux pour obtenir le développement en série des fonctions explicites; j'en présenterai ici deux exemples.

Supposons d'abord qu'on demande de développer en série ordonnée, suivant les puissances entières de t, la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}},$$

dans laquelle x désigne une quantité réelle donnée dont le module est inférieur à l'unité.

Je considérerai à cet effet l'équation du deuxième

degré

$$(1)\qquad u = x + t\,\frac{u^2-1}{2},$$

dont les racines sont données par la formule

$$(2)\qquad u = \frac{1 \pm \sqrt{1-2tx+t^2}}{t}.$$

Pour que l'équation (1) ait ses racines égales, il faut que l'on ait

$$1 - 2tx + t^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$t = x + \sqrt{1-x^2}\sqrt{-1};$$

x étant réelle et comprise entre -1 et $+1$, le module de ces deux valeurs de t est égal à l'unité ; donc, pour toutes les valeurs de t dont le module est inférieur à 1, celle des racines de l'équation (1) qui a le plus petit module est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de t. Si nous supposons que la quantité t soit réelle et comprise entre -1 et $+1$, on aura, d'après la formule de Lagrange,

$$\frac{1-\sqrt{1-2tx+t^2}}{t} = x + \frac{x^2-1}{2}\,\frac{t}{1} + \frac{d\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^2}{dx}\,\frac{t^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^{n-1}\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n}{dx^{n-1}}\,\frac{t^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

et, si l'on différentie par rapport à x les deux membres de cette formule (n° 387, *Remarque*), il viendra

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = 1 + X_1 t + X_2 t^2 + \ldots + X_n t^n + \ldots,$$

en posant, pour abréger,

$$X_n = \frac{1}{1.2\ldots n.2^n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

390. Supposons en second lieu qu'on veuille développer la fonction $\frac{(\zeta - t)^m}{(1 - t)^{m+1}}$ suivant les puissances croissantes de t.

En appliquant la formule de Lagrange à l'équation

$$(1) \qquad z = \zeta + t f(z),$$

où z désigne une fonction des variables ζ et t, et $f(z)$ une fonction quelconque de z, il vient

$$F(z) = \sum \frac{t^n}{1.2\ldots n} \frac{d^{n-1}[F'(\zeta) f(\zeta)^n]}{d\zeta^{n-1}},$$

et, en différentiant par rapport à ζ,

$$(2) \qquad F'(z) \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \sum \frac{t^n}{1.2\ldots n} \frac{d^n[F'(\zeta) f(\zeta)^n]}{d\zeta^n}.$$

Maintenant soient

$$F'(z) = z^m \quad \text{et} \quad f(z) = z - 1,$$

l'équation (1) donnera

$$z = \frac{\zeta - t}{1 - t}, \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{1}{1 - t},$$

et, par suite, l'équation (2) devient

$$\frac{(\zeta - t)^m}{(1 - t)^{m+1}} = \sum \frac{t^n}{1.2\ldots n} \frac{d^n \zeta^m (\zeta - 1)^n}{d\zeta^n}.$$

CHAPITRE XII.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES.

Théorèmes relatifs à la décomposition des fractions rationnelles.

391. La théorie de la *décomposition des fractions rationnelles* a une grande importance dans l'Analyse mathématique, et nous aurons particulièrement l'occasion d'en faire l'application dans le Calcul intégral. Aussi j'ai cru devoir reproduire ici tous les développements relatifs à cette théorie, que j'ai présentée dans mon *Cours d'Algèbre supérieure* (4e édition, tome I).

Nous commencerons par établir qu'une fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$, dont les deux termes sont des polynômes quelconques premiers entre eux, est décomposable en une partie entière (qui peut être nulle), et en plusieurs *fractions simples* à numérateurs constants, ayant pour dénominateurs les diverses puissances des facteurs linéaires qui divisent le polynôme $f(x)$. Nous démontrerons ensuite qu'une fraction rationnelle n'est décomposable ainsi que d'une seule manière, et nous indiquerons enfin le moyen d'effectuer la décomposition.

392. Théorème I. — *Si a désigne une racine de l'équation $f(x) = 0$, α son degré de multiplicité, en sorte que l'on ait*

$$f(x) = (x-a)^\alpha f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant un polynôme non divisible par $x - a$, la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$, supposée irréductible, pourra toujours être décomposée en deux parties de la manière suivante :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

A *étant une constante, et* $F_1(x)$ *un polynôme entier.*

En effet, on a identiquement, quel que soit A,

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F(x) - A f_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)},$$

et, pour que le deuxième terme du second membre ne contienne à son dénominateur que la puissance $\alpha - 1$ du facteur $x - a$, il faut et il suffit que le numérateur $F(x) - A f_1(x)$ s'annule pour $x = a$. Posons donc

$$F(a) - A f_1(a) = 0,$$

on aura

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)};$$

cette valeur de A sera finie et différente de zéro, puisque $f_1(a)$ et $F(a)$ ne sont pas nuls ; si l'on fait alors

$$F(x) - A f_1(x) = (x-a) F_1(x),$$

on aura

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}:$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — *Si l'on a*

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda,$$

$a, b, \ldots, l$ étant des quantités distinctes et $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$

des entiers positifs, la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ *pourra être décomposée de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\\ + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ + \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l} + E(x),\end{aligned}$$

$A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots, L, L_1, \ldots,$ *étant des constantes finies, et* $E(x)$ *une fonction entière.*

En effet, en posant, comme précédemment,

$$f(x) = (x-a)^\alpha f_1(x)$$

on a, par notre théorème,

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} &= \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},\\ \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{F_{\alpha-1}(x)}{(x-a) f_1(x)} &= \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)},\end{aligned}$$

$A, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}$ étant des constantes finies et déterminées, et $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\alpha(x)$ des fonctions entières. Il faut remarquer que la constante A n'est jamais égale à zéro, mais les quantités $A_1, A_2, \ldots, A_{\alpha-1}$ peuvent être nulles, car l'un des polynômes $F_1(x)$, $F_2(x), \ldots$ peut être divisible par $x-a$; en ajoutant les égalités qui pré-

cèdent, il vient

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)}$$
$$= \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)}.$$

Si l'on pose

$$f_1(x) = (x-b)^\beta f_2(x),$$

et que l'on opère sur la fraction $\frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)}$ comme nous venons de le faire sur $\frac{F(x)}{f(x)}$, on obtiendra une expression de la forme

$$\frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)} = \frac{F_\alpha(x)}{(x-b)^\beta f_2(x)}$$
$$= \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \frac{F_{\alpha+\beta}(x)}{f_2(x)},$$

et, par suite,

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$
$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{A_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \frac{F_{\alpha+\beta}(x)}{f_2(x)},$$

B, B_1, ... étant des constantes déterminées et $F_{\alpha+\beta}(x)$ une fonction entière.

En continuant ainsi, on obtiendra évidemment la formule qu'il s'agissait d'établir.

393. Théorème II. — *Une fraction rationnelle n'est décomposable que d'une seule manière en une partie entière et en fonctions simples.*

Supposons qu'on ait trouvé ces deux valeurs d'une même fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$,

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\ldots+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\ldots+E(x)$$

et

$$\frac{A'}{(x-a)^{\alpha'}}+\ldots+\frac{B'}{(x-b)^{\beta'}}+\ldots+E'(x);$$

on aura

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\ldots+E(x)=\frac{A'}{(x-a)^{\alpha'}}+\ldots+E'(x).$$

Cela posé, α et α' étant respectivement les exposants des plus hautes puissances de $x-a$ dans les deux membres, je dis que $\alpha=\alpha'$ et $A=A'$. Supposons, en effet, que α et α' soient inégaux et que α soit $>\alpha'$; tirons de l'équation précédente la valeur de $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$, et réduisons tous les autres termes au même dénominateur; on aura

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\psi(x)}$$

ou

$$A=(x-a)\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

φ et ψ désignant des polynômes dont le second n'est pas divisible par $x-a$. D'ailleurs, A est une constante; il faut donc qu'elle soit nulle, car l'équation précédente donne $A=0$ pour $x=a$. Si donc A n'est pas nulle, on ne peut pas supposer $\alpha>\alpha'$, et l'on ferait voir de même que, si α' n'est pas nulle, on ne peut supposer non plus $\alpha<\alpha'$; on a donc $\alpha=\alpha'$.

Je dis maintenant que $A=A'$; en effet, de la formule

qui exprime l'égalité des deux valeurs de $\frac{F(x)}{f(x)}$ on tirera, α' étant égal à α,

$$\frac{A - A'}{(x-a)^\alpha} = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\psi(x)},$$

ou

$$A - A' = (x-a)\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

φ et ψ étant, comme précédemment, des polynômes dont le second n'est pas divisible par $x - a$; la différence $A - A'$ est donc nulle, car, pour $x = a$, le second membre de la formule précédente se réduit à zéro.

Les termes qui renferment la plus haute puissance de $x - a$ en dénominateur, dans les deux valeurs de la fraction rationnelle, étant égaux entre eux, on pourra les supprimer et les deux restes seront égaux. En raisonnant de même sur ces deux restes, on voit que les termes qui contiennent en dénominateur la plus haute puissance du même binôme $x - a$, ou d'un autre binôme, sont aussi égaux entre eux; et, en continuant ainsi, on reconnaît que les fractions simples des deux valeurs de $\frac{F(x)}{f(x)}$ sont égales chacune à chacune : il en résulte, par conséquent, l'égalité des parties entières $E(x)$ et $E'(x)$.

Corollaire. — *La partie entière qui figure dans la valeur d'une fraction rationnelle* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *décomposée en fractions simples est égale au quotient entier de la division de* $F(x)$ *par* $f(x)$.

Car, si l'on désigne par $E(x)$ le quotient et par $\varphi(x)$ le reste de cette division, on aura

$$\frac{F(x)}{f(x)} = E(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)};$$

le numérateur de la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ étant de degré inférieur au dénominateur, cette fonction s'annule pour $x = \infty$, et en conséquence elle ne peut renfermer de partie entière.

Cas d'une fraction rationnelle dont le dénominateur n'a que des facteurs simples.

394. Soit

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

$a, b, \ldots, l$ étant des quantités différentes; si $F(x)$ désigne un polynôme quelconque, on aura, par ce qui précède,

$$(1) \quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l} + E(x),$$

A, B, ..., L étant des constantes déterminées et $E(x)$ une fonction entière.

Ainsi que nous l'avons déjà dit, le polynôme $E(x)$ peut être obtenu en effectuant la division de $F(x)$ par $f(x)$; il reste à déterminer les constantes A, B, ..., L. L'équation (1) devient, en multipliant par $f(x)$,

$$F(x) = \frac{A f(x)}{x-a} + \frac{B f(x)}{x-b} + \ldots + \frac{L f(x)}{x-l} + E(x) f(x).$$

Cette égalité a lieu identiquement; si l'on y fait $x = a$, tous les termes du second membre s'évanouiront à l'exception du premier qui se réduira à $A f'(a)$. On a, en conséquence,

$$F(a) = A f'(a), \quad \text{d'où} \quad A = \frac{F(a)}{f'(a)};$$

d'ailleurs a est l'une quelconque des racines de l'équation $f(x) = 0$; donc

$$(2) \quad A = \frac{F(a)}{f'(a)}, \quad B = \frac{F(b)}{f'(b)}, \quad \ldots, \quad L = \frac{F(l)}{f'(l)},$$

et la formule (1) devient

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &= \frac{F(a)}{f'(a)(x-a)} + \frac{F(b)}{f'(b)(x-b)} + \ldots \\ &+ \frac{F(l)}{f'(l)(x-l)} + E(x). \end{aligned} \right.$$

Lorsque le degré de $F(x)$ est inférieur au degré m de $f(x)$, la partie entière $E(x)$ se réduit à zéro, et l'on a simplement

$$(4)\quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(a)}{f'(a)(x-a)} + \frac{F(b)}{f'(b)(x-b)} + \ldots + \frac{F(l)}{f'(l)(x-l)}.$$

Soit

$$F(x) = P_0 x^{m-1} + P_1 x^{m-2} + \ldots + P_{m-2} x + P_{m-1}.$$

Si l'on multiplie la formule (4) par $f(x)$ et qu'on ordonne le second membre par rapport aux puissances décroissantes de x, le coefficient de x^{m-1} sera évidemment

$$\frac{F(a)}{f'(a)} + \frac{F(b)}{f'(b)} + \ldots + \frac{F(l)}{f'(l)},$$

et cette somme sera égale à P_0; on a donc

$$(5)\qquad \sum \frac{F(x)}{f'(x)} = P_0,$$

le signe $\sum$ indiquant qu'il faut remplacer x par chacune des m racines de l'équation $f(x) = 0$, et faire la somme des résultats. Si la fonction $F(x)$ est au plus du degré $m-2$, la quantité P_0 est nulle et l'on a dans ce cas

$$(6)\qquad \sum \frac{F(x)}{f'(x)} = 0,$$

formule qui est utile dans plusieurs circonstances.

Méthodes pour effectuer la décomposition d'une fonction rationnelle, dans le cas général.

395. Le théorème I du n° 392, par lequel on démontre la possibilité de la décomposition, donne aussi le moyen de l'effectuer. En effet, si l'on fait

$$f(x) = (x-a)^\alpha f_1(x),$$

nous avons vu que l'on a

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

en posant

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)} \quad \text{et} \quad F_1(x) = \frac{F(x) - \frac{F(a)}{f_1(a)} f_1(x)}{x-a};$$

on a ainsi l'une des fractions simples demandées, et, pour trouver les autres, il suffira d'appliquer le même théorème à la fraction complémentaire

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}.$$

Dans le cas où l'équation $f(x) = 0$ n'a que des racines simples, on retrouve facilement de cette manière la formule établie au numéro précédent; mais, ce cas excepté, l'emploi du procédé dont il vient d'être question exige des calculs assez pénibles.

396. On peut aussi employer la méthode des coefficients indéterminés dont nous avons déjà fait usage au n° 394. Soit la fraction rationnelle

$$\frac{F(x)}{f(x)},$$

que nous supposons irréductible et dont le dénominateur est divisible par la puissance $\alpha^{\text{ième}}$ du binôme $x - a$, mais ne l'est pas par une puissance supérieure. Pour trouver les fractions simples qui répondent à la racine a, on posera

$$(1) \quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{(x-a)^\alpha F_\alpha(x)}{f(x)},$$

conformément au théorème I. Si l'on multiplie cette formule par $f(x)$ et qu'on remplace x par $a+h$, on aura

$$F(a+h) = A\frac{f(a+h)}{h^\alpha} + A_1\frac{f(a+h)}{h^{\alpha-1}} + \ldots + A^{\alpha-1}\frac{f(a+h)}{h} + h^\alpha F_\alpha(a+h);$$

or on a

$$F(a+h) = F(a) + h\frac{F'(a)}{1} + \ldots + h^{\alpha-1}\frac{F^{\alpha-1}(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)} + \ldots,$$

$$f(a+h) = h^\alpha\frac{f^\alpha(a)}{1.2\ldots\alpha} + h^{\alpha+1}\frac{f^{\alpha+1}(a)}{1.2\ldots(\alpha+1)} + \ldots,$$

et, en portant ces valeurs dans la formule précédente, on obtient

$$\begin{aligned} F(a) + h\frac{F'(a)}{1} + \ldots + h^{\alpha-1}\frac{F^{\alpha-1}(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)} + \ldots \\ = A\left[\frac{f^\alpha(a)}{1.2\ldots\alpha} + h\frac{f^{\alpha+1}(a)}{1.2\ldots(\alpha+1)} + \ldots\right] \\ + A_1\left[h\frac{f^\alpha(a)}{1.2\ldots\alpha} + h^2\frac{f^{\alpha+1}(a)}{1.2\ldots(\alpha+1)} + \ldots\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + A_{\alpha-1}\left[h^{\alpha-1}\frac{f^\alpha(a)}{1.2\ldots\alpha} + \ldots\right] + h^\alpha F_\alpha(a+h). \end{aligned}$$

Cette formule a lieu, quel que soit h, et, si l'on égale de part et d'autre les coefficients des mêmes puissances

de h jusqu'à celles de degré $\alpha - 1$, on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&A \frac{f^{\alpha}(a)}{1.2\ldots\alpha} = F(a),\\
&A_1 \frac{f^{\alpha}(a)}{1.2\ldots\alpha} + A \frac{f^{\alpha+1}(a)}{1.2\ldots(\alpha+1)} = \frac{F'(a)}{1},\\
&A_2 \frac{f^{\alpha}(a)}{1.2\ldots\alpha} + A_1 \frac{f^{\alpha+1}(a)}{1.2\ldots(\alpha+1)} + A \frac{f^{\alpha+2}(a)}{1.2\ldots(\alpha+2)} = \frac{F''(a)}{1.2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&A_{\alpha-1} \frac{f^{\alpha}(a)}{1.2\ldots\alpha} + A_{\alpha-2} \frac{f^{\alpha+1}(a)}{1.2\ldots(\alpha+1)} + \ldots + A \frac{f^{2\alpha-1}(a)}{1.2\ldots(2\alpha-1)} = \frac{F^{\alpha-1}(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)}.
\end{aligned}\right.$$

Ces relations permettent de calculer successivement $A, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}$ et les valeurs de ces coefficients seront finies et déterminées, car $f^{\alpha}(a)$ est, par hypothèse, différente de zéro. On peut obtenir par ce procédé les fractions simples qui répondent aux diverses racines de l'équation $f(x) = 0$; quant à la partie entière, on la trouvera, comme nous l'avons déjà dit, en divisant $F(x)$ par $f(x)$.

Le calcul peut encore être dirigé de la manière suivante : après avoir déterminé la partie entière, par la division, on égalera la fraction complémentaire à la somme des fractions simples dans lesquelles elle peut se décomposer, chacune de ces fractions ayant pour numérateur une indéterminée. On chassera ensuite les dénominateurs et l'on exprimera que les coefficients des mêmes puissances de la variable sont égaux dans les deux membres. On obtiendra ainsi les équations nécessaires pour la détermination des coefficients.

397. Enfin on peut effectuer la décomposition par un procédé qui n'exige que la division algébrique. En effet, si l'on pose, comme nous l'avons fait plus haut,

$$f(x) = (x-a)^{\alpha} f_1(x),$$

et que l'on écrive $a+h$ au lieu de x, la formule (1) du numéro précédent, multipliée par h^α, deviendra

$$\frac{F(a+h)}{f_1(a+h)} = A + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots + A_{\alpha-1} h^{\alpha-1} + \frac{h^\alpha F_\alpha(a+h)}{f_1(a+h)},$$

et l'on voit que le polynôme

$$A + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots + A_{\alpha-1} h^{\alpha-1}$$

est le quotient que l'on obtient quand on divise l'un par l'autre les polynômes $F(a+h)$ et $f_1(a+h)$ ordonnés par rapport aux puissances croissantes de h, et que l'on poursuit l'opération jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un reste du degré α; on obtiendra donc, par cette division, les fractions simples qui se rapportent à la racine a.

On pourrait déterminer de cette manière, indépendamment les unes des autres, les fractions qui se rapportent aux diverses racines, mais il sera plus simple d'appliquer la même méthode à la fraction $\frac{F_\alpha(x)}{f(x)}$, qui complète les termes déjà trouvés; on obtiendra ainsi les termes qui se rapportent à une deuxième racine, et une troisième fraction sur laquelle on continuera l'opération.

398. La méthode précédente a surtout l'avantage de faire connaître l'expression algébrique des numérateurs des diverses fractions simples dans lesquelles se décompose la fraction rationnelle proposée. En effet, la division des polynômes $F(a+h)$ et $f_1(a+h)$, que nous avons effectuée dans le but d'obtenir les coefficients A, A_1, A_2, ..., revient évidemment à développer la fonction $\frac{F(a+h)}{f_1(a+h)}$ en série ordonnée suivant les puissances croissantes de h, et, comme une fonction n'est développable que d'une seule manière en une série de cette espèce, on obtiendra le même résultat en faisant usage

de la formule de Maclaurin. Si donc on pose

$$\frac{F(x)}{f_1(x)} = \varphi(x)$$

on aura

$$\frac{F(a+h)}{f_1(a+h)} = \varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a) + h^2\frac{\varphi''(a)}{1.2} + \ldots$$
$$+ h^{\alpha-1}\frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)} + h^\alpha R_1,$$

en désignant par $h^\alpha R_1$ le reste de la série; ici R_1 est une fonction rationnelle de h qui n'est point infinie pour $h = 0$, et, par conséquent, cette valeur de $\frac{F(a+h)}{f_1(a+h)}$ est identique à celle trouvée précédemment. On aura donc

$$A = \varphi(a), \quad A_1 = \varphi'(a), \quad A_2 = \frac{\varphi''(a)}{1.2}, \quad \ldots,$$
$$A_{\alpha-1} = \frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)},$$

d'où résulte ce théorème général :

Théorème. — *Si l'on a*

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^6 \ldots (x-l)^\lambda,$$

que $F(x)$ *désigne une fonction entière de* x, *dont le quotient par* $f(x)$ *soit* $E(x)$, *et que l'on fasse, pour abréger,*

$$\varphi(x) = (x-a)^\alpha \frac{F(x)}{f(x)}, \quad \psi(x) = (x-b)^6 \frac{F(x)}{f(x)}, \quad \ldots,$$
$$\varpi(x) = (x-l)^\lambda \frac{F(x)}{f(x)},$$

on aura la valeur suivante de la fraction ration-

nelle $\dfrac{F(x)}{f(x)}$:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = E(x)$$
$$+ \frac{\varphi(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{\varphi'(a)}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi''(a)}{1.2(x-a)^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)(x-a)}$$
$$+ \frac{\psi(b)}{(x-b)^{\beta}} + \frac{\psi'(b)}{(x-b)^{\beta-1}} + \frac{\psi''(b)}{1.2(x-b)^{\beta-2}} + \ldots + \frac{\psi^{\beta-1}(b)}{1.2\ldots(\beta-1)(x-b)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{\varpi(l)}{(x-l)^{\lambda}} + \frac{\varpi'(l)}{(x-l)^{\lambda-1}} + \frac{\varpi''(l)}{1.2(x-l)^{\lambda-2}} + \ldots + \frac{\varpi^{\lambda-1}(l)}{1.2\ldots(\lambda-1)(x-l)}.$$

Forme nouvelle de l'expression d'une fonction rationnelle décomposée en fractions simples.

399. Le résultat qui précède est susceptible d'une autre forme très-simple et très-élégante que nous allons faire connaître. Désignons par $F(x)$ une fonction rationnelle quelconque, par

$$x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_\mu$$

les racines de l'équation

$$\frac{1}{F(x)} = 0,$$

et par

$$m_1,\quad m_2,\quad \ldots,\quad m_\mu$$

les degrés de multiplicité respectifs de ces racines.

Soit aussi, pour abréger,

$$\varphi(x) = (x - x_1)^{m_1} F(x),$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction qui a une valeur finie différente de zéro pour $x = x_1$.

Si l'on imagine que la fonction rationnelle $F(x)$ soit

décomposée en fractions simples, la somme des fractions relatives à la racine x_1 sera

$$\frac{\varphi(x_1)}{(x-x_1)^{m_1}}+\frac{\varphi'(x_1)}{1.(x-x_1)^{m_1-1}}+\ldots$$
$$+\frac{\varphi^{m_1-i-1}(x_1)}{1.2\ldots(m_1-i-1)(x-x_1)^{i+1}}+\ldots+\frac{\varphi^{m_1-1}(x)}{1.2\ldots(m_1-1)(x-x_1)},$$

ainsi qu'on l'a vu plus haut. Par suite, cette somme s'obtiendra en faisant $\zeta=0$ dans l'expression

$$\frac{\varphi(x_1+\zeta)}{(x-x_1-\zeta)^{m_1}}+\frac{\varphi'(x_1+\zeta)}{1.(x-x_1-\zeta)^{m_1-1}}+\ldots$$
$$+\frac{\varphi^{m_1-i-1}(x_1+\zeta)}{1.2\ldots(m_1-i-1)(x-x_1-\zeta)^{i+1}}+\ldots+\frac{\varphi^{m_1-1}(x_1+\zeta)}{1.2\ldots(m_1-1)(x-x_1-\zeta)}.$$

Or $\varphi'(x_1+\zeta)$, $\varphi''(x_1+\zeta)$, ... peuvent être considérées comme les dérivées de $\varphi(x_1+\zeta)$ par rapport à la variable ζ, et alors il est aisé de voir que l'expression précédente se réduit à

$$\frac{1}{\Gamma(m_1)}\frac{d^{m_1-1}\dfrac{\varphi(x_1+\zeta)}{x-x_1-\zeta}}{d\zeta^{m_1-1}};$$

le symbole $\Gamma(\rho)$ désignant le produit des $\rho-1$ premiers nombres entiers quand ρ est plus grand que 1, et devant être réduit à l'unité quand ρ est égal à 1.

Comme on a

$$\varphi(x_1+\zeta)=\zeta^{m_1}F(x_1+\zeta),$$

la somme des fractions simples relatives à la racine x_1 sera égale à la valeur que prend, pour $\zeta=0$, l'expression suivante :

$$\frac{1}{\Gamma(m_1)}\frac{d^{m_1-1}\dfrac{\zeta^{m_1}F(x_1+\zeta)}{x-x_1-\zeta}}{d\zeta^{m_1-1}}.$$

Si donc la fonction rationnelle $F(x)$ ne contient pas de

partie entière, on aura

$$F(x) = \sum \frac{1}{\Gamma(m_1)} \frac{d^{m_1-1} \dfrac{\zeta^{m_1} F(x_1+\zeta)}{x - x_1 - \zeta}}{d\zeta^{m_1-1}}.$$

Dans cette formule, il faut faire $\zeta = 0$, après les différentiations; le signe sommatoire $\sum$ s'étend à toutes les racines $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$. Il est presque superflu d'ajouter que, si le degré de multiplicité d'une racine, de x_1 par exemple, est égal à 1, la dérivée $\dfrac{d^{m_1-1} \dfrac{\zeta^{m_1} F(x_1+\zeta)}{x - x_1 - \zeta}}{d\zeta^{m_1-1}}$ doit être réduite à $\dfrac{\zeta F(x_1+\zeta)}{x - x_1 - \zeta}$.

Si la fonction $F(x)$ contient une partie entière $E(x)$, on a

$$F(x) = E(x) + \sum \frac{1}{\Gamma(m_1)} \frac{d^{m_1-1} \dfrac{\zeta^{m_1} F(x_1+\zeta)}{x - x_1 - \zeta}}{d\zeta^{m_1-1}};$$

il est aisé de trouver la valeur de $E(x)$. Désignons par n l'excès du degré du numérateur de $F(x)$ sur le degré du dénominateur; n sera le degré de $E(x)$. Cela posé, si l'on change x en $\frac{1}{z}$ dans l'équation précédente et qu'on multiplie ensuite, de part et d'autre, par z^n, on aura

$$z^n F\left(\frac{1}{z}\right) = z^n E\left(\frac{1}{z}\right) + z^{n+1} \sum \frac{1}{\Gamma(m_1)} \frac{d^{m_1-1} \dfrac{\zeta^{m_1} F(x_1+\zeta)}{1 - (x_1+\zeta) z}}{d\zeta^{m_1-1}}.$$

Il s'ensuit que, si l'on développe $z^n F\left(\frac{1}{z}\right)$ en série ordonnée suivant les puissances croissantes de z, la somme des termes dont le degré ne surpasse pas n sera $z^n E\left(\frac{1}{z}\right)$.

Or, ζ désignant toujours un infiniment petit, on a, par la formule de Maclaurin,

$$z^n \mathrm{F}\left(\frac{1}{z}\right) = \zeta^n \mathrm{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{z}{1}\,\frac{d\zeta^n \mathrm{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta} + \frac{z^2}{1.2}\,\frac{d^2\zeta^n \mathrm{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^2} + \ldots;$$

donc

$$z^n \mathrm{E}\left(\frac{1}{z}\right) = \zeta^n \mathrm{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{z}{1}\,\frac{d\zeta^n \mathrm{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta} + \ldots + \frac{z^n}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n\zeta^n \mathrm{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^n},$$

et, par suite,

$$\mathrm{E}(x) = x^n\zeta^n \mathrm{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + x^{n-1}\,\frac{d\zeta^n \mathrm{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta}$$
$$+ \frac{x^{n-2}}{1.2}\,\frac{d^2\zeta^n \mathrm{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n\zeta^n \mathrm{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^n}.$$

On peut trouver une autre expression plus simple du polynôme $\mathrm{E}(x)$. En effet, le coefficient de ζ^{n-i} dans le développement $\zeta^n \mathrm{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, suivant les puissances croissantes de ζ, est égal au coefficient de ζ^n dans le développement de $\zeta^{n+i} \mathrm{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$; d'ailleurs, ces coefficients sont les valeurs que prennent, pour $\zeta = 0$, les deux quantités

$$\frac{1}{\Gamma(n-i+1)}\,\frac{d^{n-i}\zeta^n \mathrm{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^{n-i}}, \quad \frac{1}{\Gamma(n+1)}\,\frac{d^n\zeta^{n+i} \mathrm{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^n};$$

donc on a, pour $\zeta = 0$,

$$\frac{1}{\Gamma(n-i+1)}\,\frac{d^{n-i}\zeta^n \mathrm{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^{n-i}} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\,\frac{d^n\zeta^{n+i} \mathrm{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^n},$$

et il faut remarquer que le premier membre doit être réduit à $\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ dans le cas de $i = n$.

D'après cela, la valeur précédente de $E(x)$ devient

$$E(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n \zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)(1 + \zeta x + \zeta^2 x^2 + \ldots + \zeta^n x^n)}{d\zeta^n};$$

enfin, comme on a évidemment, pour $\zeta = 0$, et pour $i > n$,

$$\frac{d^n \zeta^{n+i} F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^n} = 0,$$

on peut aussi écrire

$$E(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n \zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)(1+\zeta x+\zeta^2 x^2+\ldots+\zeta^n x^n+\zeta^{n+1} x^{n+1}+\ldots}{d\zeta^n},$$

ou

$$E(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n \frac{\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{1-\zeta x}}{d\zeta^n}.$$

On a donc la formule suivante, qui donne la valeur d'une fonction rationnelle quelconque $F(x)$ décomposée en une partie entière et en fractions simples, savoir :

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n \frac{\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{1-\zeta x}}{d\zeta^n} + \sum \frac{1}{\Gamma(m_1)} \frac{d^{m_1-1} \frac{\zeta^{m_1} F(x_1+\zeta)}{x-x_1-\zeta}}{d\zeta^{m_1-1}},$$

la quantité ζ devant être égalée à zéro après les différentiations.

Mode particulier de décomposition pour les fractions rationnelles et réelles dont le dénominateur a des facteurs linéaires imaginaires.

400. La théorie que nous venons d'exposer s'applique à toutes les fractions rationnelles $\frac{F(x)}{f(x)}$, et les coefficients peuvent avoir des valeurs quelconques réelles ou imaginaires. Mais lorsque ces coefficients sont réels et que parmi les racines de l'équation $f(x)=0$ il s'en trouve quelques-unes qui sont imaginaires, l'expression de la fonction réelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ est elle-même compliquée d'imaginaires. On a cherché à modifier, dans ce cas, la manière d'effectuer la décomposition, et l'on y est parvenu comme nous allons l'indiquer.

401. La possibilité du nouveau mode de décomposition que nous avons en vue résulte du théorème suivant :

Théorème I. — *Si x^2+px+q est le produit de deux facteurs imaginaires conjugués du polynôme réel $f(x)$, n la plus haute puissance de ce trinôme qui divise $f(x)$, en sorte qu'on ait*

$$f(x)=(x^2+px+q)^n f_1(x),$$

la fraction réelle et rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ pourra être décomposée en deux parties, de la manière suivante :

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}+\frac{F_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)},$$

P *et* Q *étant des constantes réelles, et* $F_1(x)$ *un polynôme réel.*

En effet, on a identiquement

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)}$$
$$= \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{F(x)-(Px+Q)f_1(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)};$$

et l'on peut déterminer P et Q de manière que le numérateur de la deuxième partie du second membre soit divisible par x^2+px+q, c'est-à-dire de manière que ce numérateur s'annule quand on remplace x par chacune des racines de l'équation

$$x^2+px+q=0.$$

Soient $h+k\sqrt{-1}$ et $h-k\sqrt{-1}$ ces deux racines, et posons

$$F(h\pm k\sqrt{-1})-[P(h\pm k\sqrt{-1})+Q]f_1(h\pm k\sqrt{-1})=0;$$

on tirera de là

$$P(h\pm k\sqrt{-1})+Q=\frac{F(h\pm k\sqrt{-1})}{f_1(h\pm k\sqrt{-1})}=(M\pm N\sqrt{-1}),$$

M et N étant des quantités réelles dont les valeurs sont finies et déterminées, puisque, par hypothèse, $f_1(x)$ n'est pas divisible par x^2+px+q. L'équation précédente se décompose dans les deux suivantes :

$$Ph+Q=M,\quad Pk=N,$$

lesquelles donnent pour P et Q ces deux valeurs réelles et finies,

$$P=\frac{N}{k},\quad Q=\frac{Mk-Nh}{k}.$$

Les valeurs de P et Q étant ainsi déterminées, nous poserons

$$\frac{F(x)-P(x+Q)f_1(x)}{x^2+px+q}=F_1(x),$$

$F_1(x)$ désignant un polynôme réel, et l'on aura

$$\frac{F(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)} = \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{F_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1} f_1(x)};$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — *La fraction rationnelle* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *pourra se décomposer de la manière suivante :*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \ldots + \frac{P_{n-1}x + Q_{n-1}}{x^2+px+q} + \frac{F_n(x)}{f_1(x)},$$

P, Q, P_1, Q_1, ... *désignant des constantes réelles et* $F_n(x)$ *un polynôme réel.*

402. En combinant le théorème précédent avec le théorème analogue démontré au n° 392, on obtient celui-ci :

Théorème II. — *Si l'on décompose le polynôme* $f(x)$ *en facteurs réels du premier et du deuxième degré, en sorte qu'on ait*

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda (x^2+px+q)^n \ldots (x^2+rx+s)^m,$$

on pourra décomposer la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ *de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = E(x) &+ \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l} \\ &+ \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{P_1 x+Q_1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \ldots + \frac{P_{n-1}x+Q_{n-1}}{x^2+px+q} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{Rx+S}{(x^2+rx+s)^m} + \frac{R_1 x+S_1}{(x^2+rx+s)^{m-1}} + \ldots + \frac{R_{m-1}x+S_{m-1}}{x^2+rx+s},\end{aligned}$$

$E(x)$ *désignant une partie entière qui peut être nulle, et* $A, A_1, \ldots, L, L_1, \ldots, P, Q, P_1, Q_1, \ldots, R, S, R_1, S_1, \ldots$ *des constantes réelles.*

403. THÉORÈME III. — *Une fraction rationnelle n'est décomposable que d'une seule manière en fractions simples de la forme qu'on vient de considérer.*

Soient deux valeurs d'une même fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$. On démontrera, comme au n° 393, l'égalité des fractions simples qui correspondent aux facteurs du premier degré du dénominateur, et quant à celle des fractions simples qui correspondent aux facteurs du second degré, elle peut se démontrer d'une manière analogue, comme on va le voir. Soient $\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}$ le terme dont le dénominateur contient la plus haute puissance de x^2+px+q dans la première valeur de $\frac{F(x)}{f(x)}$, et $\frac{P'x+Q'}{(x^2+px+q)^{n'}}$ le terme analogue dans la seconde valeur. Je dis d'abord que $n'=n$. Supposons, en effet, que cela ne soit pas, et que l'on ait $n>n'$: de l'égalité qui a lieu entre les deux valeurs de $\frac{F(x)}{f(x)}$ tirons la valeur de $\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}$; cette valeur sera exprimée par une somme de quantités dont aucune n'a en dénominateur une puissance de x^2+px+q supérieure à la $(n-1)^{\text{ième}}$. En réduisant donc toutes ces quantités au même dénominateur, on aura une égalité de la forme

$$\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}=\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}\psi(x)},$$

ou

$$Px+Q=(x^2+px+q)\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ désignant des polynômes, dont le second $\psi(x)$ n'est pas divisible par x^2+px+q. Or l'égalité précédente est impossible; car, autrement, l'équation $Px+Q=0$ devrait mettre les deux racines de l'équation $x^2+px+q=0$, ce qui ne peut arriver, à moins que P et Q ne soient nuls en même temps contrairement à l'hypothèse. On ne peut donc supposer $n>n'$ ni $n'>n$, pour une raison semblable; par conséquent, on a $n'=n$.

Je dis maintenant que l'on a aussi $P'=P$, $Q'=Q$. Reprenons, en effet, l'égalité qui a lieu par hypothèse entre les deux valeurs de $\frac{F(x)}{f(x)}$, mettons dans un même membre les deux termes $\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}$ et $\frac{P'x+Q'}{(x^2+px+q)^n}$, et dans le second membre tous les autres termes dont les dénominateurs ne contiendront aucune puissance de x^2+px+q supérieure à la $(n-1)^{\text{ième}}$; réduisant tous ces derniers termes au même dénominateur, on aura une égalité de cette forme :

$$\frac{(P-P')x+(Q-Q')}{(x^2+px+q)^n}=\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}\psi(x)},$$

ou

$$(P-P')x+(Q-Q')=(x^2+px+q)\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ désignant, comme précédemment, des polynômes dont le second n'est pas divisible par x^2+px+q, et l'on fera voir aussi, comme plus haut, que cette égalité exige

$$P=P',\quad Q=Q'.$$

Il suit de là que, dans les deux valeurs de $\frac{F(x)}{f(x)}$, les termes qui contiennent en dénominateur la plus haute puissance d'un facteur du second degré sont égaux; en supprimant

ces deux termes, les deux restes auront encore, pour la même raison, deux termes égaux; et, en continuant ainsi, on voit que les deux valeurs de la fraction considérée ne sont formées que de fractions simples égales chacune à chacune : il en résulte en même temps l'égalité des parties entières, s'il y en a.

404. Méthodes de décomposition. — Pour effectuer la décomposition d'une fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$, on déterminera la partie entière et les fractions qui correspondent aux facteurs réels du premier degré du dénominateur, comme on l'a vu aux nos 395 et suivants. Quant aux fractions qui correspondent aux facteurs réels du second degré, on pourra les déterminer successivement par le procédé même qui nous a servi à démontrer le théorème I. On pourra aussi faire usage de la méthode des coefficients indéterminés.

Dans le cas où les racines imaginaires de l'équation $f(x) = 0$ sont toutes inégales, on peut déduire la nouvelle expression de la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ de celle qui a été établie au n° 394. Soient, en effet $h + k\sqrt{-1}$ et $h - k\sqrt{-1}$ deux racines simples imaginaires et conjuguées de l'équation $f(x) = 0$; l'expression de la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ contiendra les deux termes suivants :

$$\frac{F(h + k\sqrt{-1})}{f'(h + k\sqrt{-1})} \frac{1}{x - h - k\sqrt{-1}},$$

$$\frac{F(h - k\sqrt{-1})}{f'(h - k\sqrt{-1})} \frac{1}{x - h - k\sqrt{-1}},$$

dont la somme a la forme

$$\frac{A + B\sqrt{-1}}{x - h - k\sqrt{-1}} + \frac{A - B\sqrt{-1}}{x - h + k\sqrt{-1}},$$

et peut en conséquence se réduire à une expression telle quc

$$\frac{Px + Q}{(x - h)^2 + k^2}.$$

Il résulte de là que la fraction $\frac{Px + Q}{(x-h)^2 + k^2}$, où P et Q désignent des constantes réelles, pourra remplacer, dans l'expression de $\frac{F(x)}{f(x)}$, les deux fractions simples qui correspondent aux racines $h \pm k\sqrt{-1}$.

Détermination d'une fonction entière par le moyen des valeurs qui répondent à des valeurs données de la variable.

405. Une fonction entière du degré m de la variable x est entièrement déterminée lorsque l'on connaît les valeurs de cette fonction qui répondent à $m+1$ valeurs données de x. La formule qui détermine la valeur de cette fonction est précisément, comme on va le voir, celle qui a été établie au n° 394, et qui exprime la valeur d'une fraction rationnelle décomposée en fractions simples.

Soient

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m$$

les valeurs d'une fonction $F(x)$ du degré m, correspondant aux valeurs données

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$$

de la variable x; posons

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m),$$

on aura

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - x_0} + \frac{f(x)}{x - x_1} + \ldots + \frac{f(x)}{x - x_m},$$

et, par conséquent,

$$f'(x_\mu) = (x_\mu - x_0)(x_\mu - x_1)\ldots(x_\mu - x_m).$$

Cela posé, le degré de $f(x)$ surpassant d'une unité celui de $F(x)$, on a (nº394)

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x_0)}{f'(x_0)}\frac{1}{x-x_0} + \frac{F(x_1)}{f'(x_1)} + \frac{1}{x-x_1} + \ldots + \frac{F(x_m)}{f'(x_m)}\frac{1}{x-x_n},$$

et, en chassant le dénominateur $f(x)$, il viendra

$$\begin{aligned} F(x) = {} & u_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_m)} \\ & + u_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_m)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + u_m \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})}. \end{aligned}$$

Cette formule donne la solution de la question proposée : d'ailleurs celle-ci ne peut admettre une autre solution; car, s'il existait une fonction $F_1(x)$ du degré m, différente de $F(x)$ et satisfaisant aux conditions du problème, l'équation

$$F_1(x) - F(x) = 0,$$

qui est au plus du degré m, admettrait les $m+1$ racines $x_0, x_1, \ldots, x_m$, ce qui est impossible.

FIN DU TOME PREMIER.

8470 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.

